LIBRARY

BUREAU OF EDUCATION

6—1132

NLE
ed.gov

ELEMENS
DE
MATHEMATIQUE
DE MONSIEUR VARIGNON,

DES ACADEMIES ROYALES DES SCIENCES de France, d'Angleterre, & de Pruſſe, Profeſſeur de Mathématique au College de Mazarin, & Lecteur du Roy en Philoſophie, au College Royal.

A AMSTERDAM,
Chez FRANÇOIS CHANGUION.

M DCC XXXIV.

A

SON ALTESSE SERENISSIME,

MONSEIGNEUR

LE COMTE DE CLERMONT.

MONSEIGNEUR,

Je prens la liberté d'offrir à VOTRE ALTESSE SERENISSIME, *ces Elémens de Mathématique,*

perſuadé qu'Elle voudra bien agréer que je les mette au jour ſous ſes auſpices. Le principal but de l'illuſtre Géométre qui en eſt l'Auteur, a toujours été de perfectionner les Arts; je ne puis donc mieux répondre à ſes vuës, qu'en mettant ſon ouvrage ſous la protection d'un Prince, qui vient de donner des marques éclatantes de ſon goût pour les Siences, & de ſon zéle pour l'avancement des Arts, en établiſſant une Académie dont les projets & les travaux donnent de ſi hautes eſpérances au Public.

J'ai l'honneur d'être avec un très-profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME,

Le très-humble & très-obéïſſant
ſerviteur, COCHET.

PREFACE.

JE ne puis donner au Public une idée plus juſte, & plus avantageuſe de ces Elémens de Géométrie, qu'en diſant qu'ils ſont l'ouvrage du célébre Monſieur VARIGNON, & qu'il y a donné, ſur tout pendant les derniéres années de ſa vie, tous les ſoins, & toute l'attention dont il étoit capable, pour faciliter à ſes Eléves l'étude de la Géométrie. Bien différent en cela de la plûpart des grands Géométres, qui s'occupent principalement à faire de nouvelles découvertes, & ſe mettent peu en peine de rendre plus aiſé le chemin, qui conduit où ils ne ſont eux-mêmes parvenus que par des travaux immenſes. La méthode qu'il a ſuivie dans ces Elémens, le met parfaitement à couvert des reproches, qu'on fait peut-être avec aſſés de fondement à la plûpart des Géométres, en les accuſant de manquer d'ordre dans l'arrangement

de leur matiére. Monſieur Varignon s'étudioit à mettre tout dans le plus grand jour, il ne s'épargnoit point, comme ſont quelquefois de grands hommes, le travail de l'arrangement beaucoup moins flatteur, & ſouvent plus pénible que celui de la production même ; comme le dit l'illuſtre Auteur, dont la plume ſavante & délicate conſacre à l'immortalité, la mémoire de ces grands Hommes, qui ſont tous les jours de nouvelles découvertes dans les Siences les plus ſublimes. Les principes de Géométrie ſont développés dans cet Ouvrage avec tant de clarté & d'exactitude, les propoſitions y ſont enchaînées d'une maniére ſi ſimple & ſi naturelle, les démonſtrations ſont ſi courtes & ſi faciles, qu'on y reconnoîtra aiſément la ſupériorité du génie de celui qui en eſt Auteur. Il n'a jamais donné ſes Elémens de Géométrie qu'en Latin, je les ai traduits en François, avec autant de fidélité & de préciſion qu'il m'a été poſſible, afin de les rendre utiles à un plus grand nombre de perſonnes ; c'eſt le même motif qui m'a déterminé à y joindre un abrégé d'Algébre & d'Arithmétique, tiré du même Auteur, pour ſervir d'introduction à toutes les parties des Mathématiques.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, ces *Elémens de Mathématique*; & j'ai cru que ſur le nom ſeul du célébre M. VARIGNON, il n'y auroit pas à douter que l'impreſſion n'en dût être très-utile. Fait à Paris ce 17 Décembre 1730. FONTENELLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conſeillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: Salut. Notre bien amé PIERRE-MICHEL BRUNET, fils, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui avoit été mis en main un Manuſcrit qui a pour Titre: *Les Elémens de Mathématique, par le feu ſieur* VARIGNON, qu'il ſouhaitteroit faire imprimer & donner au Public, s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce néceſſaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres, ſuivant la feuille imprimée & attachée pour modelle, ſous le contreſcel des preſentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces preſentes de faire imprimer ledit livre cy-deſſus ſpecifié, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſeparement & autant de fois que bon lui ſemblera, ſur papier & caracteres conformes à ladite feüille imprimée & attachée ſous notredit contre-ſcel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de ſix années conſecutives, à compter du jour de la date deſdites preſentes; faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéïſſance; comme auſſi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter ni contrefaire ledit Livre ci-deſſus expoſé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement de titre, ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, & en quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts, à la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des

Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impreſſion de ce Livre ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, & que l'Impetrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril 1725. Et qu'avant que de l'expoſer en vente, le manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Livre ſera remis dans le même état où l'Aprobation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & feal Chevalier, Garde des Sceaux de France le Sieur Chauvelin, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le ſieur Chauvelin, le tout à peine de nullité des préſentes; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Expoſant ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie deſdites préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent, de faire pour l'éxécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Verſailles le quinziéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cens trente-un, & de notre Regne le ſeiziéme. Par le Roy, en ſon Conſeil,

NOBLET.

Regiſtré ſur le Regiſtre VIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris No. 139. Fol. 140. conformément aux anciens Reglemens confirmez par celui du 28. Fevrier 1723. A Paris le 22. Mars 1731.

P. A. LE MERCIER, *Syndic.*

De l'Imprimerie de GISSEY.

TABLE

DES ELEMENS D'ALGEBRE & d'Arithmétique.

PRINCIPES GENERAUX. Page 2
Définitions générales. 2
Demandes générales. 3
Axiomes généraux. 4
LIVRE PREMIER. De l'addition, souſtraction, multiplication & diviſion des grandeurs entiéres. 7
CHAPITRE I. De l'addition. 7
Définition I. Ce qu'on entend par addition. 7
Définition II. Ce que c'eſt que nombre. 7
ARTICLE I. De l'addition des nombres. 7
Premiére propoſition. Ajoûter enſemble des nombres entiers. 8
Démonſtration de l'addition. 10
ARTICLE II. De l'addition des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 11
CHAPITRE II. De la ſouſtraction des grandeurs entiéres, d'autres grandeurs entiéres. 12
Définition III. Ce qu'on entend par ſouſtraction. 12
ARTICLE I. De la ſouſtraction des nombres entiers. 13
Propoſition II. Trouver la différence de deux nombres, ou ôter le plus petit du plus grand. 13
ARTICLE II. De la ſouſtraction des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 14
CHAPITRE III. De la multiplication des grandeurs entiéres. 15
Définition IV. Ce que c'eſt que la multiplication. 15
Propoſition III. Multiplier toutes ſortes de nombres. 16
Démonſtration de la multiplication. 20
ARTICLE II. De la multiplication des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 20
CHAPITRE IV. De la diviſion des grandeurs entiéres. 22
Definition V. Ce qu'on entend par diviſion. 22
ARTICLE I. De la diviſion des nombres. 22
Propoſition IV. Diviſer toutes ſortes de nombres les uns par les autres, les plus grands par les plus petits. 22
ARTICLE II. De la diviſion des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 27
LIVRE SECOND. Des proportions. 29

Définition VI. Ce que c'eſt que raiſon, & de combien de ſortes il y en a. 29
CHAPITRE I. Des proportions géométriques. 30
Définition VII. Ce qu'on entend par raiſon Géometrique. 30
Définition VIII. Ce que c'eſt qu'antécédent. 30
Définition IX. Ce qu'on entend par raiſon d'égalité, & d'inégalité. 31
Définition X. Ce que c'eſt que raiſons égales, ſemblables, les mêmes. 31
Définition XI. Ce qu'on entend par raiſons inégales. 31
Définition XII. Ce que c'eſt que rapport compoſé. 32
Définition XIII. Ce que c'eſt que rapport doublé, ou raiſon doublée. 32
Définition XIV. Ce qu'on entend par proportion ou analogie. 33
Définition XV. Ce qu'on entend par proportion continuë. 33
Définition XVI. Ce que c'eſt que diſproportion. 33
Lemme I. Le produit du diviſeur par le quotient, eſt toûjours égal à la grandeur diviſée. 34
Lemme II. De quelque maniére qu'on multiplie deux grandeurs l'une par l'autre, il en réſultera toûjours le même produit. 35
Lemme III. Les grandeurs qu'on multiplie également, demeurent dans le même rapport. 35
Lemme IV. Les quotiens de différentes grandeurs diviſées par la même, ſont entr'eux comme les grandeurs diviſées. 36
Lemme V. Les quotiens d'une même grandeur diviſée par différentes grandeurs, ſont entr'eux comme les diviſeurs. 37
Lemme VI. Prémiérement le produit des extrêmes de quatre grandeurs proportionnelles, eſt toûjours égal au produit des moyennes.
Secondement, ſi le produit des extrêmes de quatre grandeurs eſt égal au produit des moyennes, ces quatre grandeurs ſont proportionnelles. 37
Exemple de la regle de proportion directe. 39
Exemple de la régle de proportion indirecte. 39
Exemple de la Régle de proportion compoſée. 40
De la Régle de compagnie. 41
Exemple de la Régle de compagnie ſimple. 41
Exemple de la Régle de compagnie compoſée. 41
CHAPITRE II. Des fractions. 43
Définition XVII. Ce qu'on entend par fractions. 43
Définition XVIII. Ce qu'on entend par dénominateur. 43
De l'Addition des fractions. 46
De la ſouſtraction des fractions. 46
De la multiplication des fractions. 47

De la diviſion des fractions, 48
LIVRE TROISIEME. De l'extraction des racines 50
Définition XIX. Ce qu'on entend par racine. 50
Définition XX. Ce que c'eſt que puiſſance. 50
Définition XXI. Ce qu'on entend par prémiére puiſſance. 51
Définition XXII. Ce que c'eſt qu'une grandeur quarrée. 51
CHAPITRE I. De l'extraction des racines quarrées. 52
Démonſtration de l'extraction des racines quarrées. 54
CHAPITRE II. De l'extraction des racines cubiques. 57
Des racines ſourdes & imaginaires, ou impoſſibles. 60
LIVRE QUATRIEME. Des équations. 62
Définition XXIII. Ce qu'on entend par équation. 62
Reduire par l'addition une équation à une autre équivalente. 63
Réduire par la ſouſtraction une équation à une autre équivalente. 64
Réduire par la multiplication une équation à une autre équivalente. 64
Réduire par la diviſion une équation à une autre équivalente. 65

Fin de la Table des Elémens d'Algébre & d'Arithmetique.

ELEMENS
DE
MATHEMATIQUE.

LES Mathématiques considérent les propriétés des grandeurs. On appelle grandeur, tout ce qui peut être augmenté ou diminué ; & comme toute grandeur est étenduë ou nombre, on peut diviser les Mathématiques en deux parties ; savoir, l'Algébre & la Géométrie : Toutes les autres, comme les Mécaniques, l'Optique, les Fortifications, &c. ne sont qu'une application de l'Algébre & de la Géométrie à la Physique.

L'Algébre traite des grandeurs considérées en général, c'est pourquoi les principes de l'Algébre sont les premiers élémens de toutes les Mathématiques ; & comme toutes les regles de l'Arithmetique sont tirées de

l'Algébre ; nous ne ſéparerons point l'Arithmétique de l'Algébre ; mais nous joindrons par tout les calculs d'Arithmétique à ceux d'Algébre, pour faire mieux ſentir l'analogie qui eſt entre eux.

L'Algébre emploie dans ſes calculs les lettres de l'alphabet, & l'Arithmétique ſe ſert des ſignes qu'on appelle chiffres.

Nous diviſerons ce traité d'Algébre en quatre livres. Dans le premier nous parlerons de l'addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion ; dans le ſecond, des proportions & des fractions ; dans le troiſiéme, de l'extraction des racines ; & dans le quatriéme, des équations.

PRINCIPES GENERAUX.

Il y a trois ſortes de principes ſur leſquels toutes les Mathématiques ſont fondées ; ſavoir, les définitions, les axiomes & les demandes.

DEFINITIONS GENERALES.

I.

Les définitions expliquent la ſignification des mots dont on ſe ſert, par exemple, ce qu'on doit entendre par les mots de triangle, de point, &c.

II.

Les demandes ſont des ſuppoſitions ſi ſimples, que toute perſonne, pour peu de réflexion qu'elle y faſſe, doit les admettre ; par exemple on demande, pour parvenir à une démonſtration, qu'il ſoit permis de mener une ligne d'un point à un autre point, ou d'imaginer qu'elle y ſoit menée.

III.

Les axiomes ſont des vérités évidentes à toute perſonne qui y fait attention ; par exemple, *le tout eſt plus grand que ſa partie.*

IV.

Un théorême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit ſeulement de la démonſtration d'une vérité.

V.

Un problême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe & de démontrer que la maniére qu'on propoſe pour faire cette choſe eſt infaillible, & un veritable chemin pour y parvenir.

VI.

Les corollaires ou conſéquens ſont des vérités qui deviennent néceſſairement connuës par les propoſitions démontrées, ou par les définitions expoſées.

VII.

Cette marque = ſignifie égal ; cette autre + ſignifie plus, cette troiſiéme — ſignifie moins ; par exemple, $2+3=5$, c'eſt-à-dire, deux, plus, trois, égal, cinq.

VIII.

Cette note ou marque $>$ ſignifie plus grand, & cette autre $<$ ſignifie plus petit ; par exemple, $7-2>4$, c'eſt-à-dire, ſept moins deux ſont plus grands que quatre.

DEMANDES GENERALES.

I.

Lorſque pluſieurs grandeurs ſont inégales, qu'il ſoit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

II.

Qu'il ſoit permis de nommer une grandeur d'une ou de pluſieurs lettres de l'alphabet.

III.

Que les grandeurs égales, ou de même nature ; ſoient exprimées par des lettres ſemblables, ſi cela eſt néceſſaire pour une démonſtration.

IV.

Les grandeurs inégales, ou de differente nature ; ſe ront exprimées par des lettres différentes.

AXIOMES GENERAUX.

I.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

II.

Le tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

III.

La moitié, le tiers, le quart, &c. d'un tout eſt égal à la moitié, au tiers & au quart de toutes ſes parties priſes enſemble.

IV.

Après avoir ôté toute une grandeur d'elle-même ; il ne reſte rien.

V.

Si à grandeurs égales ; on ajoûte grandeurs égales ; les tous qui en réſulteront ſeront égaux.

VI.

Réciproquement ; ſi à des grandeurs égales ; d'autres grandeurs étant ajoûtées, il reſulte des tous égaux, ces grandeurs ajoûtées ſont égales.

VII.

Si à grandeurs inégales ; on ajoûte grandeurs égales ;

les tous qui en réſulteront ſeront inégaux.

VIII.

Si des grandeurs inégales ajoûtées à des grandeurs inégales font des tous égaux, la plus grande de ces grandeurs inégales aura été ajoûtée à la plus petite, & la plus petite à la plus grande.

IX.

Les grandeurs qui ajoûtées à des grandeurs égales, donnent des tous inégaux, ſont inégales, & la plus grande eſt celle qui fait un tout plus grand.

X.

Ces grandeurs ſont inégales, qui ajoûtées à des grandeurs inégales donnent des tous égaux, & la plus grande des grandeurs ajoûtées, eſt celle qui eſt jointe à la plus petite, & la plus petite celle qui eſt jointe à la plus grande.

XI.

Si de grandeurs égales on ôte grandeurs égales, les reſtes ſeront égaux.

XII.

Et réciproquement après avoir ôté certaines grandeurs d'autres grandeurs égales, ſi les reſtes ſont égaux, les grandeurs retranchées ſeront égales entre elles.

XIII.

Si de grandeurs inégales, on ôte grandeurs égales, ou moins de la plus grande que de la plus petite, les reſtes ſeront inégaux.

XIV.

Si de grandeurs égales, on ôte grandeurs inégales, les reſtes ſeront inégaux.

XV.

Réciproquement les grandeurs ôtées de grandeurs égales, ſont inégales, lorſque les reſtes ſont inégaux.

XVI.

Des grandeurs ſont égales, lorſqu'ôtées de grandeurs égales, les reſtes ſont égaux.

XVII.

Des grandeurs ſont inégales, lorſqu'ôtées de grandeurs inégales, les reſtes ſont égaux.

XVIII.

Les grandeurs qui ſont égales à une même troiſiéme; ſont égales entre elles; ou bien les grandeurs qui ſurpaſſent une troiſiéme grandeur d'un excès égal, ou ſont moindres qu'une troiſiéme d'une grandeur égale, ſont égales entre elles.

XIX.

Une grandeur égale, plus grande, ou plus petite que l'une de deux grandeurs égales, eſt auſſi égale, plus grande, ou plus petite que l'autre.

XX.

Si de trois grandeurs, la premiére eſt plus grande que la deuxiéme, la deuxiéme que la troiſiéme; la premiere ſera auſſi plus grande que la troiſiéme.

AVERTISSEMENT.

Quoique ces définitions, demandes & axiomes, conviennent généralement à toutes les parties des Mathématiques; cependant la Géométrie & les autres parties élémentaires, ont encore leurs définitions, demandes & axiomes.

LIVRE PREMIER.

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion des grandeurs entiéres.

NOus diviſerons ce Livre en quatre Chapitres. Le premier ſera de l'addition; le ſecond, de la ſouſtraction; le troiſiéme, de la multiplication; le quatriéme, de la diviſion.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition.

DEFINITION I.

L'addition eſt un aſſemblage de deux ou pluſieurs grandeurs en une, qu'on appelle *ſomme* ou *total.*

Comme nous avons à parler dans ce Chapitre de l'addition des grandeurs exprimées par des lettres & par des chiffres, nous le diviſerons en deux Articles, dont l'un ſera de l'addition des nombres, l'autre de l'addition des lettres ou des grandeurs exprimées par des lettres; & parce que les exemples frappent plus dans les commencemens que les regles générales, nous parlerons d'abord de l'addition des nombres.

ARTICLE PREMIER.

De l'Addition des Nombres.

DEFINITION II.

Le nombre eſt une collection d'unitez. L'unité eſt oppoſée à la multiplicité, & on la conſidére ſans faire attention aux parties qui la compoſent, ou à une autre choſe dont elle peut être partie; Par exemple, un ſol, un écu, une toiſe, un piéd, &c.

Il y a dix ſortes de ſignes ou caractéres dont on ſe ſert pour exprimer toutes ſortes de nombres, & on les appelle chiffres ; Savoir,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Un, deux, trois, quatre, cinq, ſix, ſept, huit, neuf, zero.

Il faut remarquer que ce dernier chiffre 0, qu'on appelle zero ne ſignifie rien ſeul ; mais ſeulement lorſqu'il eſt mis après les autres dont il augmente la valeur.

La valeur des chiffres ne dépend pas ſeulement de leur figure, mais auſſi de leur arrangement.

Lorſque pluſieurs chiffres ſont rangés de ſuite, ceux qui ſont dans la premiere place (commençant à compter de droite à gauche) ne valent jamais plus qu'eux-mêmes ; ceux qui ſont dans la ſeconde place, valent dix fois ce qu'ils vaudroient s'ils étoient dans la premiere. 1, par exemple, dans la premiére place ne vaut qu'une ſeule unité ; dans la ſeconde place il vaut dix ; dans la troiſiéme il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la ſeconde ; ſavoir, dix dixaines, ou une centaine ; dans la quatriéme place, il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la troiſiéme, ſavoir dix centaines ou un mille, &c.

On compte de droite à gauche en diſant, nombre, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, million, dixaine de million, centaine de million, milliars ou billions, &c.

Lorſqu'il y a pluſieurs chiffres de ſuite, on les ſépare de trois en trois par tranches, avec de petites virgules pour éviter la confuſion ; la premiere tranche eſt appellée unité ; la ſeconde mille ; la troiſiéme millions, &c. Par exemple, dans le nombre 96, 638, 908, la troiſiéme tranche eſt quatre-vingt-ſeize millions, la ſeconde ſix cens trente-huit mille ; la premiere à droite neuf cens huit.

PREMIERE PROPOSITION.

Ajoûter enſemble des nombres entiers.

Pour faire cette opération, il faut écrire les chiffres qui

qui expriment les nombres qu'on veut assembler : De sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

Après avoir mené une ligne sous ces nombres ainsi disposés, il faut assembler ceux qui sont de même espéce, & lorsque leur somme est au-dessous de dix, on l'écrit sous chaque rangée ; mais si elle excede neuf, alors parce qu'il faut plusieurs chiffres pour l'exprimer, on écrit seulement le dernier qui se trouve vers la main droite, & on reserve ce qui se trouveroit vers la main gauche, pour l'ajoûter à la colonne suivante, & ainsi de suite jusqu'à la fin.

EXEMPLE.

Pour ajoûter ces trois nombres 5473 ; 4214, 102, après les avoir disposés l'un sur l'autre comme on vient d'enseigner, on commence vers la main droite : disant : 3 & 4 font 7 & 2 font neuf ; j'écris 9 sous la premiere rangée, ensuite je passe aux dixaines qui sont dans la seconde rangée, je les ajoûte les unes aux autres, en disant 1 & 7 font 8 ; j'écris 8 sous la seconde rangée, & je passe aux mille qui sont dans la troisiéme rangée ; & je dis 1 & 2 font 3 & 4 font 7 ; j'écris 7 sous la troisiéme rangée. Enfin je passe à la quatriéme, & je dis 4 & 5 font 9, j'écris 9 sous cette quatriéme rangée.

5	4	7 3. A.
4	2	1 4. B.
	1	0 2. C.
9	7	8 9. D.

AUTRE EXEMPLE.

Pour ajoûter ces nombres 112 l. 12 s. 4 d. 2429 l. 17 s. 3 d. & 820 l. 10 s. 10. d. il faut commencer par les deniers, disant : 10 deniers & 3 font 13 deniers, qui valent 1 sol & 1 denier ; j'écris la petite ligne A, pour marquer 1 sol. & je retiens 1, que j'ajoûte avec quatre, ce qui fait 5 que j'écris sous ces deniers. Ensuite je compte combien il y a de petites lignes marquées à côté des deniers ; j'en trouve une, cela signifie

112. l.	12. s.	4. d.	
2429.	17.	3.	A.
820.	10.	10.	
3363.	0.	5.	

que c'eſt un ſol qu'il faut joindre avec les ſols, diſant 1 retenu & 7 (*negligeant le* 0) ſont 8 & 2 font 10 ; j'écris 0 & je retiens 1 que je joins avec les dixaines des ſols, diſant 1 de retenu & 1 ſont deux & 1 ſont trois & 1 font 4 dixaines de ſols, & parce qu'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je prens la moitié de ces quatre dixaines de ſols ; cela fait 2 l. que je joins avec les livres, diſant, 2 l. provenuës des ſols, & 9 (*negligeant le* 0 (font 11 & 2 font 13 ; j'écris 3 & je retiens 1 dixaine que je joins à la colonne ſuivante, diſant 1 retenu & 2 ſont 3 & 2 ſont 5 & 1 ſont 6 ; j'écris 6. Enſuite paſſant à la troiſiéme colonne ſuivante, je dis : 8 & 4 ſont 12 & 1 ſont 13, j'écris 3 & je retiens 1. Enfin au quatriéme rang, je dis 1 dixaine de cent que j'ai retenu avec 2 ſont 3, j'écris 3 & ainſi je trouve que la ſomme ou le total de trois nombres propoſés eſt 3363 l. 0 ſ. 5 d.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

Le tout (*Axiome.* 2) eſt égal à ſes parties priſes enſemble ; mais la ſomme trouvée par l'opération, n'eſt autre choſe que la collection de tous les nombres qu'il falloit ajoûter ; car cette ſomme contient autant d'unités, autant de dixaines, autant de centaines, &c. que ces nombres pris enſemble, comme on le voit par l'opération. Donc la ſomme eſt égale à ces nombres pris enſemble, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Puiſque la ſomme (*Axiome.* 2) eſt égale à ſes parties priſes enſemble, il eſt clair que ſi de cette ſomme on ôte un des nombres dont elle eſt compoſée, le reſte ſera égal aux autres nombres pris enſemble ; lors donc que cela arrive ainſi, c'eſt une marque que l'addition a été bien faite, ſinon on s'eſt trompé : l'addition par conſéquent ſe prouve par la ſouſtraction dont nous parlerons dans le chapitre ſuivant.

ARTICLE SECOND.

De l'addition des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres.

Lorſqu'on veut ajoûter enſemble des grandeurs dont chacune eſt exprimée par une ou pluſieurs lettres, il ſuffit de les écrire de ſuite ſans rien changer à leurs ſignes. Par exemple pour aſſembler a avec $2a$ & avec $4a$, on écrira $a + 2a + 4a$.

Les grandeurs exprimées par des lettres ſemblables, & qui ont les mêmes ſignes, doivent être ajoûtées enſemble, & leur ſomme doit être précedée du ſigne qui précedoit chacune en particulier.

EXEMPLE.

Si on veut ajoûter ces grandeurs $3a - 2b - d$ avec $a - b$.

$$\begin{array}{r} 3a - 2b - d. \\ a - b \\ \hline 4a - 3b - d. \end{array}$$

1°. Les grandeurs qu'il faut ajoûter les unes aux autres doivent être jointes avec les ſignes qu'elles ont devant elles ſans en changer aucun.

2°. Les grandeurs qui n'ont aucun ſigne, ſont toûjours regardées comme ayant le ſigne +; ainſi dans l'exemple préſent, on aura pour la ſomme $3a + a - 3b - d$. mais les grandeurs qui ont les mêmes ſignes, doivent être ajoutées enſemble, lorſqu'elles ſont auſſi exprimées par les mêmes lettres; ainſi $3a + a$ donnent $4a$, & par conſéquent la ſomme eſt $4a - 3b - d$.

Lorſque les grandeurs exprimées par les mêmes lettres ſont précedées de ſignes contraires, & de chiffres inégaux, on retranche la valeur du plus petit de ces chiffres de la valeur de l'autre: par exemple, ſi on veut ajoûter $a + b - 3$ avec $2a - 3b + 8$, on aura $a + b - 3 + 2a - 3b + 8$, on effacera $+ b$, & dans la grandeur $- 3b$ on retranchera & effacera $- b$; il reſtera encore $a - 3 + 2a - 2b + 8$, on effacera encore $- 3$, & dans le nombre $+ 8$, on effacera $+ 3$ & il reſ-

tera $a + 2a - 2b + 5$. Enfin on aſſemblera a avec $2a$ & on aura $3a - 2b + 5$ pour la ſomme, ou total des grandeurs $a + b - 3$ & $2a - 3b + 8$.

EXEMPLE.

$a + b - 3$
$2a - 3b + 8$

$a+b-3+2a-3b+8$
$a - 3+2a-2b+8$
$a + 2a - 2b+5$

ſomme $3a - 2b+5$

DEMONSTRATION.

Le ſigne + marque l'addition, par conſéquent il faut joindre les quantités qui doivent être ajoûtées, par le ſigne +, quelqu'autre ſigne qu'elles ayent devant elles. Si elles ont donc devant elles le ſigne +, il faut les ajoûter par + + & ſi elles ont le ſigne —, il faut les ajoûter par le ſigne + —; mais + + n'eſt autre choſe que +, + — n'eſt autre choſe que —. Donc quelques ſignes que ces grandeurs qui doivent être ajoûtées ayent, il faut les joindre avec les ſignes qu'elles ont devant elles. Voilà la regle générale de l'addition des lettres, de laquelle ſuit neceſſairement celle de la ſouſtraction dont nous avons à traiter dans le chapitre ſuivant.

CHAPITRE SECOND.

De la Souſtraction des grandeurs entiéres, d'autres grandeurs entiéres.

DEFINITION TROISIEME.

LA ſouſtraction eſt une opération par laquelle on retranche une petite grandeur d'une plus grande.

COROLLAIRE.

La ſouſtraction eſt directement oppoſée à l'addition; car elle détruit ce que l'addition fait.

Nous diviſerons ce Chapitre comme le précédent en deux articles. Dans le premier, nous parlerons de la ſouſ-

traction des nombres entiers, & dans le second de celle des grandeurs générales exprimées par des lettres.

ARTICLE PREMIER.

De la soustraction des nombres entiers.

Le nombre qui reste après la soustraction est appellé *différence* de ces deux nombres. Je suppose que l'on sait comment il faut ôter un nombre au-dessous de dix de tout autre nombre au-dessous de dix neuf, par exemple que 3 ôtés de 4 reste 1, que neuf ôtés de dix-huit, reste neuf.

PROPOSITION II.

Trouver la différence de deux nombres, ou ôter le plus petit du plus grand.

Pour faire cette opération, il faut placer le nombre qu'on veut retrancher ou soustraire sous le plus grand nombre duquel on veut retrancher le plus petit; de sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines &c. Ensuite il faut mettre une ligne au-dessous de ces chiffres, au-dessous de laquelle on écrira le reste, ou résidu, ou différence. Enfin on soustrait les nombres inferieurs des superieurs l'un après l'autre, & on écrit de suite les restes au-dessous de la ligne.

EXEMPLE.

Pour soustraire 234 de 458, après les avoir disposés comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite à la premiere colonne, disant: de 8 j'ôte 4 reste 4 que j'écris:

de	458
ôtant	234
reste	224

ensuite à la seconde colonne je dis: de 5 ôtant 3 reste 2 que j'écris; & à la troisiéme colonne, je dis: de 4 ôtant 2, reste 2 que j'écris; & ainsi je trouve qu'après avoir retranché 234 de 458, il reste 224.

AUTRE EXEMPLE.

Pour retrancher 2071 l. 4 ſ. de 42603 l. 15 ſ. après avoir rangé ces deux nombres l'un ſur l'autre, il faut commencer par les ſols vers la main droite, diſant : de 5 ôtant 4 reſte 1 que j'écris ſous le 4 : enſuite aux dixaines de ſols, je dis : de 1 ôtant rien reſte 1 que j'écris. Des ſols il faut paſſer aux livres, diſant : de 3 je retranche 1 reſte 2 que j'écris. Enſuite au deuxiéme rang, je dis : de 0 retranchant 7, cela ne peut être ; ſur le 6 qui précede j'emprunte une unité, laquelle étant tranſportée à la place du zero vaudra 10, & je dirai : de 10 retranchant 7, il reſte 3 que j'écris ſur le 7, enſuite au troiſiéme rang, je dis : de 5 (parce que des 6 j'avois emprunté une unité, & pour m'en ſouvenir, j'avois marqué un point deſſus le 6) ôtant 0 reſte 5 que j'écris. Au quatriéme rang, je dis : de 2 retranchant 2 reſte rien ; j'écris 0, parce qu'il ne faut point laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; & au cinquiéme rang, je dis : de 4 retranchant rien reſte 4 que j'écris, & je trouve qu'il reſte 40532 l. 11 ſ. La preuve de la ſouſtraction ſera faite en ajoûtant le reſte ou reſidu, avec le nombre qui a été retranché, & ſi l'opération eſt exacte, la ſomme de ces deux nombres doit être égale (*Axiome* 2.) au nombre dont on a retranché ; ſi cela n'arrive pas, l'opération n'a pas été exacte, & il faut la recommencer.

de	42603 l. 15 ſ.
ôtant	2071 4
reſte	40532 11.

ARTICLE SECOND.

De la ſouſtraction des grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

Lorſqu'on veut ſouſtraire une grandeur d'une autre, il ſuffit de changer les ſignes de la grandeur qu'on veut ſouſtraire, & d'ajoûter enſuite cette grandeur à celle dont on vouloit faire cette ſouſtraction, de la maniére qu'on le vient d'enſeigner ; la ſomme qui en réſulte eſt le reſte qu'on cherche par cette ſouſtraction.

EXEMPLE.

Pour ſouſtraire $4a-3b$ de $7a+6b$, en changeant les ſignes de $4a-3b$, je trouve $-4a+3b$, & l'ajoûtant à $7a+6b$, je trouve $3a+9b$ qui eſt le reſte que je cherche par cette opération.

de	$7a+6b$
ôtés	$4a-3b$
reſte	$3a+9b$

AUTRE EXEMPLE.

de	$2a-4b+c-3d$
ôtés	$a+7b-4c+2m$
reſte	$a-11b+5c-3d-2m$

CHAPITRE III.

De la multiplication des grandeurs entiéres.

DEFINITION IV.

LA multiplication eſt une addition abregée, par laquelle on ajoûte un nombre autant de fois à lui-même qu'il y a d'unités dans un autre nombre. Par exemple, multiplier 6 par 3, c'eſt ajoûter le nombre 6 à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités en 3, c'eſt-à-dire 3 fois pour avoir 18, qui eſt le nombre qu'on cherche.

Le nombre cherché par la multiplication, qui exprime le total ou la ſomme de l'addition d'un autre nombre ajoûté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans un troiſiéme, eſt appellé *produit de la multiplication*, & les deux nombres dont le produit eſt formé, ſont appellés *racines du produit.*

Pour multiplier facilement les nombres ſimples, c'eſt-à-dire qui ſont au-deſſous de dix, il faut fermer les deux mains, enſuite lever autant de doigts d'une main qu'il y a d'unités à ajoûter à l'un de ces nombres ſimples pour faire 10; il faut de même lever autant de doigts de l'autre main qu'il y a d'unités à ajoûter à l'autre nombre pour le

rendre égal à dix. Après cela il faut multiplier le nombre des doigts levés d'une main, par les doigts levés de l'autre main & ajoûter au produit qui en réſulte autant de dixaines qu'il reſte de doigts baiſſés dans les deux mains,& la ſomme qui en réſulte eſt le produit qu'on cherche. Par exemple pour multiplier 7 par 8, je ferme les deux mains, & je dis : 7 différe de dix par 3 unités, c'eſt pourquoi je leve trois doigts d'une main ; enſuite je dis : 8 differe de dix par deux unités, je leve deux doigts de l'autre main. Après cela je multiplie les doigts levés d'une main par ceux de l'autre main, c'eſt-à-dire 2 par 3 qui me donnent 6 que j'ajoûte à 5 dixaines, parce qu'il reſte cinq doigts baiſſés,& le produit 56 eſt ce que l'on cherche. Il faut remarquer qu'en multipliant un nombre par l'autre indifféremment, c'eſt-à-dire, le premier par le ſecond, ou le ſecond par le premier, il en réſulte toûjours le même produit.

Pour trouver le nombre qu'on cherche par la multiplication, il faut placer les deux nombres à multiplier l'un ſous l'autre de la même maniére que dans les opérations précédentes, & ſi les deux nombres ne ſont pas compoſés d'autant de chiffres l'un que l'autre, il faut que celui qui en a moins ſoit ſous celui qui en a plus, afin de pouvoir plus facilement les multiplier.

PROPOSITION III.

Multiplier toutes ſortes de nombres.

Pour multiplier toutes ſortes de nombres, il faut premiérement les placer & les diſpoſer, comme il a été dit ci-deſſus, ſecondement après avoir tiré une ligne ſous ces nombres, il faut multiplier le premier chiffre à droite du nombre de deſſous par tous les chiffres du nombre qui eſt au-deſſus, de maniére que ſi le produit qui en réſulte eſt compoſé de deux chiffres, on n'écrit que le premier, & l'on ajoûte le ſecond au produit ſuivant. Les exemples rendront cela plus facile, & feront mieux connoître que tous les préceptes, comment ſe fait la multiplication.

EXEMPLE.

EXEMPLE.

Pour multiplier 345 par 2, après les avoir disposés comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite, disant : 2 fois 5, sont 10 ; j'écris 0 sous le premier chiffre, & je retiens une dixaine dans ma mémoire pour le rang suivant ; je dis ensuite 2 fois 4 sont 8, & 1 que j'avois retenu, sont 9, j'écris 9 ; enfin je dis 2 fois 3 sont 6, j'écris 6 : ainsi je trouve que le produit de cette multiplication est 690.

345
2
690

AUTRE EXEMPLE.

Pour multiplier 275 par 24, il faut dire 4 fois 5 sont 20, & écrire 0 sous le 4, & retenir deux dixaines : ensuite 4 fois 7 ou 7 fois 4 sont 28, & 2 que j'avois retenu sont 30, j'écris 0 & je retiens trois dixaines. 4 fois 2 sont 8 & 3 que j'avois retenu, sont 11 ; j'écris 1 sous le 2 multiplié, & j'avance une dixaine, parce que c'est tout.

	275
	24
	1100
	550
Prod.	6600

Ensuite il faut multiplier 275 par les deux dixaines de 24 en cette sorte : 2 fois 5 sont 10, j'écris 0 sous les dixaines de 24, & je retiens 1 ; ensuite 2 fois 7 sont 14, & 1 que j'avois retenu sont 15, j'écris 5 & je retiens 1 : 2 fois 2 sont 4, & 1 que j'avois retenu sont 5, j'écris 5. Ces deux produits ainsi arrangés étant par l'addition réduits à une somme, on trouve que le produit total est 6600 qu'on cherchoit.

OBSERVATION I.

Lorsqu'il faut multiplier un nombre par des livres, sols ou deniers, on commence toujours par les moindres espéces de monnoie. Or pour multiplier par les deniers, & avoir dans la même opération un produit réduit en sols, selon les deniers qui se rencontrent depuis 1 jusqu'à 11, il faut prendre de la somme qu'on veut multiplier ces parties, savoir, lorsqu'il y a un denier, pour avoir en

ſols la valeur du produit ; on prendra une douziéme partie du nombre propoſé, parce qu'un denier eſt une douziéme partie du nombre propoſé, c'eſt-à-dire, d'un ſol. à 2 deniers, on prendra une ſixiéme partie &c. Les exemples ſuivans rendront cela facile.

OBSERVATION II.

Lorſqu'on prend quelque moitié, tiers, ou quart, &c. d'un nombre, il faut toujours commencer vers la main gauche, afin que s'il reſte quelques unités à chaque chiffre, elles ſoient jointes aux ſuivans en qualité de dixaines.

OBSERVATION III.

Lorſqu'on veut réduire en livres un nombre de ſols ; par exemple, pour réduire en livres 428 ſols, il faut ſéparer le dernier chiffe 8, & prendre la moitié des autres, diſant la moitié de 4 eſt 2 qu'il faut écrire, la moitié de 2 eſt 1 qu'il faut auſſi écrire, & le chiffre 8 qu'on avoit ſéparé ſignifie 8 ſols, & ainſi on trouve que 428 ſols font 21 liv. 8 ſols.

42|8 ſ.
21 l. 8 ſ.

Pour réduire en livres 12196 ſ. après avoir ſéparé le dernier chiffre 6, on prend la moitié des autres : on ne dira pas la moitié de 1, mais on dira la moitié de 12 eſt 6 qu'il faut écrire. On ne dit point la moitié de 1 ; c'eſt pour cela qu'on écrit 0 au-deſſous, parce qu'il ne faut pas laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; mais cet 1 vaut 10 à l'égard du 9 ſuivant, & y joignant ce 9, cela fait 19, on dit la moitié de 19 eſt 9, reſte 1, il faut écrire 9 ſous le 9, & 1 qui reſte eſt une dixaine qu'il faut écrire devant le 6 pour ſignifier 16 ſ. & ainſi on trouve que 12196 ſ. font 609 livres 16 ſols.

1219|6 ſ.
609 l. 16 ſ.

EXEMPLE.

Si on veut connoître quelle ſomme produiſent 48 muids de vin à raiſon de 35 livres 12 ſols chaque muid ; c'eſt

chercher quelle ſomme produiſent 48 fois 35 livres 12 ſols.

Il faut commencer par les ſols, diſant: 2 fois 8 ſont 16; j'écris 6 ſous le 5, & je retiens 1: 2 fois 4 ſont 8, & 1 que j'avois retenu ſont 9, j'écris 9, enſuite je multiplie par la dixaine des ſols, diſant: une fois 8 ſont 8, j'écris 8 ſous le 9 au rang des dixaines; 1 fois 4 ſont 4, j'écris 4. Après avoir additionné ou aſſemblé ces deux produits de ſols ainſi arrangés, je trouve que le produit total des 48 fois 12 ſols eſt 576 ſ. je réduis ce 576 ſ. en livres, comme il a été enſeigné, je trouve pour leur valeur 28 liv. 16 ſ. que j'écris au-deſſous.

48 muids.
à 35 l. 12 ſ.

96 ſ.
48

576 ſ.

28 l. 16 ſ.

Enſuite je multiplie par les livres, diſant 8 fois 5 ſont 40, j'écris 0 ſous le 8 des livres provenuës des ſols, & je retiens 4: 4 fois 5 ſont 20, & 4 que j'avois retenu ſont 24, j'écris 4 & j'avance 2. Je multiplie enſuite par les dixaines de 35, diſant: 3 fois 8 ſont 24; j'écris 4 au rang des dixaines ſous le produit précédent, & je retiens 2: 3 fois 4 ſont 12, & 2 que j'avois retenu ſont 14, j'écris 4 & j'avance 1. Après avoir additionné ces trois produits, je trouve 1708 liv. 16 ſ. pour la valeur totale de 48 muids de vin.

AVERTISSEMENT.

Lorſque les nombres qu'il faut multiplier ont un ou pluſieurs 0 à la fin, il faut ſeulement multiplier les autres chiffres, & ajoûter au produit qui en réſulte autant de 0 qu'il y en a à la fin de chaque nombre: par exemple, pour multiplier 200 par 30 il ſuffit de multiplier 2 par 3 & ajoûter au produit 6, les deux 0 du premier nombre, 200, & celui du ſecond, 30, & les 6000 qui en réſultent, ſont le produit de 200 par 30.

Lorſque l'un des nombres eſt compoſé d'une unité & de pluſieurs 0, on a le produit en ajoûtant tous les 0 de ce nombre à l'autre; par exemple, pour multiplier 154

par 100, il ſuffit d'ajoûter à 154 deux 0, & il en réſulte 15400, ce qui eſt le produit de 154 multiplié par 100.

DEMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

Par les conditions de l'operation préſente, il eſt conſtant 1°. Qu'on répéte autant de fois le nombre à multiplier qu'il y a d'unités dans le premier chiffre du multiplicateur. 2°. Autant de dixaines de fois, qu'il y a de dixaines dans le ſecond chiffre; autant de centaines de fois qu'il y a de centaines dans le troiſiéme chiffre du multiplicateur, & ainſi des autres. Donc le nombre à multiplier eſt répeté autant de fois qu'il y a d'unités dans tout le multiplicateur. Mais (*Def.* 4) répeter un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre, c'eſt le multiplier par cet autre. Donc en ſuivant les regles de l'opération préſente, on multiplie véritablement un nombre par un autre: ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE SECOND.

De la Multiplication des Grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

Pour exprimer le produit des grandeurs multipliées l'une par l'autre; par exemple, de la grandeur a multipliée par la grandeur b, on écrit ces grandeurs l'une après l'autre, c'eſt-à-dire, ab, ou ba.

Lorſqu'il ſe rencontre un produit de pluſieurs grandeurs égales ou exprimées par les mêmes lettres; par exemple aaa, on abrége cette expreſſion en cette maniere a^3.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'on multiplie des grandeurs précedées des mêmes ſignes, leur produit doit toujours être précedé du ſigne +; par exemple + 3 multiplié par + 4 donne + 12, parce que les ſignes qui précedent 3 & 4 étant tous deux affirmatifs, dans cette multiplication, on ajoûtera autant

de fois 3 à lui-même qu'il y a d'unités dans 4, & par conſéquent il ne doit paroître aucun ſigne de négation dans le produit qui eſt 12 : de même — 3 par — 4 donne + 12, parce que la négation d'une négation eſt une affirmation ; or multiplier — 3 par — 4, c'eſt retrancher — 3 autant de fois que — 4 exprime d'unités ; & retrancher, c'eſt nier donc en multipliant — 3 par — 4, on nie quatre fois — 3 ; nier 4 fois — 3, c'eſt mettre 4 fois 3 qui ſont 12 ; donc — 3 par — 4 donnent + 12.

Lorſqu'au contraire des deux grandeurs à multiplier, il y en a une précedée du ſigne + & l'autre du ſigne —, le produit doit toujours être précedé du ſigne —. Par exemple, + 3 multiplié par — 4 donne — 12, parce que la grandeur précedée du ſigne — exprime qu'il faut retrancher pluſieurs fois celle qui eſt précedée du ſigne + ; comme dans l'exemple propoſé — 4 exprime qu'il faut retrancher autant de fois + 3 qu'il y a d'unités dans 4, c'eſt-à-dire, 4 fois ; & ainſi le produit qui n'eſt que l'addition de tous ces retranchemens, doit être précedé du ſigne negatif ou de ſouſtraction.

COROLLAIRE.

Donc les mêmes ſignes donnent +, & les ſignes différens produiſent —

EXEMPLES DE LA MULTIPLICATION.

Mul.	+ 3 *a*	— 3 *a*	— 3 *a*	+ 3 *a*
Par.	+ 6 *b*	— 6 *b*	+ 6 *b*	— 6 *b*
Prod.	+ 18 *ab*	+ 18 *ab*	— 18 *ab*	— 18 *ab*

Les grandeurs qui ne ſont précedées d'aucun ſigne, ſont regardées comme ayant devant elles le ſigne +.

CHAPITRE IV.

De la Diviſion des grandeurs entiéres.

DEFINITION I.

LA diviſion eſt une opération par laquelle on partage une grandeur en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans une autre.

Le nombre qui exprime une de ces parties égales eſt appellé *Quotient.* Le nombre qu'on veut partager, eſt appellé nombre à diviſer ; & le nombre qui exprime en combien de parties on veut diviſer l'autre, eſt appellé *Diviſeur.* Comme on connoît plus facilement ce que c'eſt que la Diviſion par le moyen des nombres que par les lettres ; nous commencerons par la Diviſion des nombres.

ARTICLE PREMIER.

De la diviſion des Nombres.

Diviſer un nombre par un autre, c'eſt chercher combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, comme on le voit par la définition 5.

On écrit le nombre à diviſer, enſuite on méne une ligne au-deſſous de laquelle on écrit le diviſeur, commençant de gauche à droit, & au bout de la ligne qu'on vient de mener, on écrit le quotient comme on verra dans les exemples ſuivans.

PROPOSITION IV.

Diviſer toutes ſortes de Nombres les uns par les autres, les plus grands par les plus petits.

Pour diviſer un nombre par un autre, il faut premiérement écrire le diviſeur au-deſſous du nombre à diviſer,

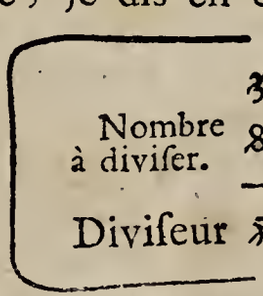
de maniére que le dernier chiffre de l'un réponde au dernier chiffre de l'autre, le penultiéme au penultiéme, & ainſi des autres ; or le diviſeur eſt cenſé au-deſſous de tous les chiffres qui ſont à gauche du nombre à diviſer. Que ſi le nombre qui eſt au-deſſus du diviſeur eſt plus petit que le diviſeur, il faut l'avancer d'un pas à droit.

Secondement après avoir diſpoſé le nombre à diviſer, & le diviſeur comme on vient de le dire, & avoir mené une ligne entre ces deux nombres, & comme un petit croiſſant au bout de cette ligne à droit, on cherche combien de fois le diviſeur eſt renfermé dans le nombre à diviſer ; mais parce que cela eſt ſouvent difficile à connoître, ſur-tout lorſque le diviſeur eſt compoſé de pluſieurs chiffres, on cherche combien de fois le dernier chiffre à gauche du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt au-deſſus de lui, & le nombre qui l'exprime, c'eſt-à-dire, le quotient doit être écrit après le petit croiſſant ; que ſi il n'y eſt point contenu, on met o dans le quotient, ce qui ſignifie qu'il n'y eſt point.

Troiſiémement on multiplie tout le diviſeur par le quotient, c'eſt-à-dire, par chaque chiffre du quotient, & on ôte le produit qui en réſulte du nombre des chiffres qui ſont au-deſſus du diviſeur. Les exemples rendront cela plus clair.

EXEMPLES DE LA DIVISION.

Pour diviſer 804 en 5 parties égales, après avoir écrit le diviſeur 5 ſous le 8 premier chiffre du nombre à diviſer vers la main gauche ; je dis en 8 combien y a-t'il de fois 5 ? il y eſt une fois, j'écris 1 au quotient, enſuite (multipliant ce que je viens d'écrire au quotient par le diviſeur) je dis 1 fois 5 ſont 5. Or 5 étant retranché de 8, il reſte 3 que j'écris

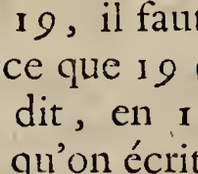


ſur 8 après avoir tranché le 8 & le 5 avec une petite ligne, pour marquer que l'opération eſt finie à leur égard. Je récris le diviſeur 5 ſous le 0 du nombre à diviſer, cela fait 30 avec le 3 qui eſt reſté du chiffre 8; je cherche en 30 combien de fois 5? je l'y trouve 6 fois que j'écris au quotient, & je multiplie 6 du quotient par le diviſeur 5, cela fait 30: or ce nombre 30 étant retranché du premier nombre, il ne reſte rien; j'écris 0 au-deſſus de 0. Enfin conſiderant ce dernier 0 comme placé devant le 4 du nombre à diviſer, cela ne fait que quatre; je cherche en 4 combien de fois 5? ce nombre 5 n'y étant point contenu, j'écris au quotient 0, & je dis 5 fois 0 produiſent 0, lequel étant retranché, il reſte 4 que je ſépare avec une petite ligne d'avec les autres chiffres tranchés. Ainſi je trouve pour quotient de cette diviſion 160 & 4 qui reſtent, c'eſt-à-dire, que 160 eſt une 5e. partie de 804, excepté 4: ou bien que le nombre 5 eſt contenu 160 fois dans 804 moins 4. Ce nombre 4 reſte encore à diviſer.

AUTRE EXEMPLE.

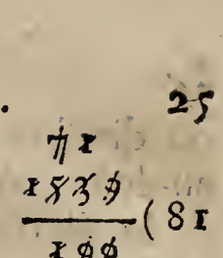
Lorſque le nombre à diviſer eſt compoſé d'un premier chiffre à gauche, ou de pluſieurs qui forment un nombre plus petit que celui d'un pareil nombre de chiffres du diviſeur, il faut placer le premier chiffre à gauche du diviſeur ſous le penultiéme du nombre à diviſer;

ainſi pour diviſer 1539 par 19, il faut placer le diviſeur 19 ſous 53, parce que 19 eſt plus grand que 15: enſuite on dit, en 15 combien de fois 1? mais parce qu'on écrit jamais dans le quotient un nombre plus grand que 9,



quoique 1 ſoit contenu 15 fois dans 15, on ne peut cependant pas mettre 15 dans le quotient, ni 12, ni 10; & ſi on met 9, en multipliant 9 par 19, le produit qui en réſulteroit ſeroit 171 plus grand que 153, & par conſéquent on ne pourroit retrancher ce produit du quotient par le diviſeur, du nombre qui eſt au-deſſus de lui; il ne faut

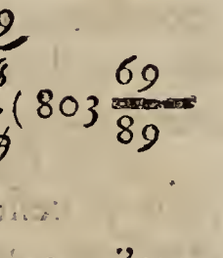
faut donc mettre que 8 au quotient, & dire 8 fois 1 ſont 8, qui ôté de 15 reſte 7. On écrit 7 ſur le 5, & on efface le nombre 15; enſuite on dit 8 fois 9 ſont 72 : qui de 73 ôte 72, reſte 1 qu'on écrit au-deſſus du 3, & on efface 73 avec tout le diviſeur. Après cela on avance le diviſeur d'un pas, & on dit : dans un combien de fois 1 ? il y eſt une fois ; on écrit 1 au quotient, qu'on multiplie enſuite par tout le diviſeur, en diſant une fois 1 eſt 1 ; qui de 1 ôte 1, reſte rien ; une fois 9 eſt 9, qui de 9 ôte 9, il ne reſte rien, & ainſi la diviſion eſt faite ; & on trouve que 19 eſt 81 fois dans 1539. Ce qu'il falloit trouver.



Il y a une autre maniére de faire la diviſion, ſelon laquelle on efface moins de chiffres, comme on peut le voir dans les exemples ſuivans.

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviſer le nombre 71536 par 89, j'écris 89 au-deſſous de 715, parce que 89 eſt plus grand que 71, & je cherche combien de fois 8 eſt dans 71, je trouve qu'il y eſt 8 fois ; je mets 8 au quotient, & je dis 8 fois 9 ſont 72, j'emprunte 7 dixaines qui jointes au 5 qui eſt au-deſſus du 9, font 75, de 75 j'ôte 72, & il reſte 3 que j'écris au-deſſus du 5 ; enſuite je dis 8 fois 8 ſont 64, & 7 que j'ai emprunté ſont 71 ; qui de 71 ôte 71, reſte rien ; je tranche les chiffres du diviſeur, que j'avance enſuite d'un pas au-deſſous de 33 ; & comme le diviſeur 89 n'eſt point contenu dans 33, j'écris 0 au quotient, & j'avance le diviſeur ſous 36, enſuite je cherche combien de fois 8 eſt contenu dans 33, je trouve qu'il y eſt 4 fois ; mais parce que 9 n'eſt pas 4 fois dans ce qui reſte, je n'écris que 3 au quotient, & je dis 3 fois 9 ſont 27, ôtant 27 de 36, il reſte 9 que j'écris au-deſſus de 6, enſuite après avoir tranché le 3 & le 6 du nombre à diviſer & le 9



du diviſeur, je dis 3 fois 8 ſont 24; qui de 30, qui ſont au-deſſus, ôte 24, reſte 6, que j'écris ſur le 3; j'efface le 8 du diviſeur & le 3 qui eſt au-deſſus du 5 du nombre à diviſer, & la diviſion eſt faite parce qu'on ne peut plus avancer le diviſeur, il reſte donc 69 à diviſer par 89; je ſépare avec une petite ligne le 6 & le 9 pour marquer que c'eſt ce qui reſte à diviſer.

DEMONSTRATION DE LA DIVISION.

Dans l'opération préſente, on multiplie le diviſeur par tous les chiffres du quotient, & on ôte du nombre à diviſer le produit qui en réſulte. Donc on ôte autant de fois le diviſeur du nombre à diviſer, qu'il y a d'unités dans le quotient; mais on ôte auſſi autant de fois le diviſeur du nombre à diviſer qu'il y eſt contenu; car on l'ôte juſqu'à ce que le reſte du nombre à diviſer ſoit moindre que le diviſeur. Donc le quotient eſt compoſé d'autant d'unités que le diviſeur eſt renfermé de fois dans le nombre à diviſer. Donc le quotient marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer: ce qu'il falloit démontrer.

Il eſt facile de juger par la pratique de la multiplication & celle de la diviſion que ces deux opérations ſe détruiſent, auſſi bien que l'addition & la ſouſtraction, & par conſéquent ſe ſervent mutuellement de preuves l'une à l'autre. Ainſi la diviſion eſt bonne lorſqu'en multipliant le quotient par le diviſeur, le produit qui en réſulte eſt le nombre à diviſer: de même la multiplication eſt bonne lorſqu'en diviſant par l'une le produit des deux grandeurs multipliées, le quotient qui en réſulte eſt l'autre des deux grandeurs multipliées.

ARTICLE SECOND.

De la diviſion des grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

On eſt convenu que pour diviſer une grandeur par une autre, on effaceroit dans la grandeur à diviſer les lettres qui s'y pourroient trouver ſemblables à celles du diviſeur, & qu'on prendroit pour quotient les lettres qui reſteroient. Par exemple pour diviſer ef par e, on a pour quotient f, pour diviſer ade par d, on a pour quotient ae.

Lorſque la grandeur à diviſer & le diviſeur ſont précedés des mêmes ſignes, leur quotient doit toujours être précedé du ſigne +; car le quotient multiplié par le diviſeur doit, comme on l'a démontré, donner un produit égal à la grandeur à diviſer. Mais on a auſſi démontré dans l'opération de la multiplication, que + par +, ou — par — donnoit +. Donc le quotient + multiplié par le diviſeur +, ou le quotient — multiplié par le diviſeur — doit donner +. Donc ſi on diviſe + par +, ou — par —, le quotient ſera +.

On peut démontrer de la même maniére que + diviſé par —, ou — diviſé par + doit donner pour quotient —.

EXEMPLES.

Pour diviſer la grandeur $dg + gf + dh + fh$ par $d + f$, il faut écrire ce diviſeur $d + f$ deſſous la grandeur à diviſer. On peut commencer de gauche à droit, & dire, le ſigne + qui précede dg diviſé par le ſigne + qui précede d dans le diviſeur, donne au quotient +; enſuite dg diviſé par d, donne pour quotient g; on écrit g au quotient. Enſuite multipliant ce

$$\begin{array}{l|l} -dg-gf-dh-fh & \\ \quad dg+gf+dh+fh & \\ \hline & (g+h \\ \quad d+f & \end{array}$$

quotient $+ g$ par la grandeur $+ f$ du diviſeur, cela produit gf qu'il faut retrancher, & pour cet effet on lui prépoſe ce ſigne —, & on cherche s'il y a dans la grandeur à diviſer quelque grandeur de même genre, & dans cet exemple on trouve $+ gf$; au-deſſus de $+ gf$ on écrit $- gf$ qui eſt le produit précedent retranché, enſuite ces deux grandeurs ſemblables, étant précedées de chiffres égaux & de ſignes différens, ſelon ce qu'on a enſeigné dans l'addition, elles ſe détruiſent, on les tranche & il ne reſte rien: enſuite le quotient $+ g$ étant multiplié par l'autre partie $+ d$ du diviſeur, produit $+ dg$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrit $- dg$ au-deſſus de $+ dg$. Ces deux grandeurs ſe détruiſent à cauſe de leurs ſignes différens, & on les efface.

Il reſte encore $+ dh + fh$ à diviſer, & on dit $+$ diviſé par $+$ donne $+$ au quotient; dh diviſé par d, donne pour quotient h: on écrit $+ h$ au quotient, & on multiplie $+ h$ par $+ f$ du diviſeur, & le produit $+ fh$ qui en réſulte doit être retranché, & pour cela on écrit $- fh$ au-deſſus de $+ fh$, de ſorte que ces deux grandeurs par l'addition ſe détruiſent, on les efface. Enfin on multiplie $+ h$ qui eſt au quotient par $+ d$ qui eſt au diviſeur, & l'on retranche le produit $+ dh$ qui en réſulte, & pour cela l'on écrit $- dh$ au-deſſus de $+ dh$. Ces deux grandeurs ſe détruiſant on les efface, & ainſi la grandeur $dh + gf + dh + fh$ diviſée par $d + f$ donne pour quotient $g + h$.

Pour diviſer la grandeur $a^3 + b^3$ par $a + b$, j'écris de même le diviſeur au-deſſous de la grandeur à diviſer, & je diviſe a^3 par a, & le quotient a^2 qui en réſulte multiplié par le diviſeur $a + b$, donne $a^3 + a^2 b$ qu'il faut ôter de la grandeur à diviſer, & pour cela on efface a^3 & on écrit au-deſſus $- a^2 b$, parce que pour ôter $+ a^2 b$, il faut mettre $- a^2 b$. Enſuite je di-

$$
\begin{array}{l|l}
 & + a^2 b^2 \\
 & - a^2 b \\
a^3 + b^3 & \\
\hline
 & (a a - a b + b b. \\
a + b &
\end{array}
$$

viſe $a^2 b$ par a, & le quotient eſt $- ab$ qui multiplié par le diviſeur $a + b$, donne $- a^2 b - ab^2$ qu'il faut ôter de la grandeur qui eſt au-deſſus, ainſi on efface $- a^2 b$ & on met au-deſſus $+ ab^2$: Enfin on diviſe $+ ab^2$ par a, & le quotient b^2 qui en réſulte doit être multiplié par le diviſeur & retranché de ce qui eſt au-deſſus du diviſeur, après quoi il ne reſte rien ; ainſi $aa - ab + b^2$ eſt le quotient que l'on cherche.

LIVRE SECOND.

Des Proportions.

DEFINITION VI.

LES Mathématiciens appellent *raiſon*, l'égalité ou l'inégalité qui ſe trouve entre deux grandeurs qu'on compare enſemble. Si on ne conſidére que la différence dont la plus grande ſurpaſſe la plus petite, on la nomme raiſon *arithmétique* ; par exemple ſi en comparant 2 avec 6 on conſidére que 6 ſurpaſſe 2 ou 2 eſt ſurpaſſé par 6 de 4, cette inégalité eſt ce qu'on appelle raiſon Arithmétique ; mais ſi on conſidére que 2 eſt contenu 3 fois dans 6, ou que 6 contient trois fois 2, cette inégalité ainſi conſidérée, ſe nomme raiſon géométrique.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette définition qu'on ne peut comparer enſemble que les grandeurs homogénes, ou bien qu'il n'y a de rapport qu'entre les grandeurs de la même eſpéce : par exemple entre le mouvement & le mouvement, entre le ſon & le ſon ; car on ne peut pas dire qu'il y a plus, moins, ou également loin de Pâques à la Pentecôte que de Paris à Lyon, parce que ces deux diſtances ſont de

différente eſpéce, l'une de lieu, l'autre de temps.

Des deux ſortes de raiſons dont l'on vient de parler, réſultent trois eſpéces de proportions, ſavoir, les Géométriques, Arithmétiques & harmoniques. Les proportions harmoniques tirent leur origine des géométriques & des arithmétiques. Nous ne traiterons dans ce Livre que des proportions géométriques & des fractions qui expriment les proportions géométriques, comme on le verra par la ſuite. Nous diviſerons donc ce ſecond Livre en deux chapitres ; dans le premier nous parlerons des proportions & dans le deuxiéme des fractions.

CHAPITRE PREMIER.

Des Proportions Géométriques.

DEFINITION VII.

LA raiſon géométrique (*Def. 6.*) eſt la maniére dont une grandeur en contient une autre, ou eſt contenue dans cette autre.

COROLLAIRE.

Le quotient de deux grandeurs diviſées l'une par l'autre, exprime donc le rapport qui eſt entre elles, car (*Def. 5.*) le quotient exprime comment la plus grande contient la plus petite.

DEFINITION VIII.

De deux grandeurs qu'on compare entre elles, celle qu'on compare ſe nomme *antécedent*, & celle avec laquelle elle eſt comparée, conſéquent du rapport qui eſt entre elles.

DEFINITION IX.

Lorſque l'antécedent & le conſéquent ſont égaux, on nomme le rapport qui eſt entre ces grandeurs *raiſon d'égalité*; s'ils ſont inégaux, on l'appelle *raiſon d'inégalité*.

DEFINITION X.

On appelle deux *raiſons* égales, ſemblables, les mêmes, lorſque l'antécedent de l'une contient ſon conſéquent de la même maniére que le conſéquent de l'autre eſt contenu dans ſon antécedent.

COROLLAIRE I.

Deux grandeurs égales entre elles, ou égales à une troiſiéme, ont le même rapport à cette troiſiéme.

COROLLAIRE II.

Ces grandeurs ſont égales qui ont un même rapport avec une troiſiéme.

COROLLAIRE III.

Puiſque (*Def.* 4.) le produit de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre contient la grandeur multipliée, de la même maniére que le multiplicateur contient l'unité. Le produit a le même rapport à la grandeur multipliée que le multiplicateur à l'unité.

COROLLAIRE IV.

De même, puiſque dans la diviſion le quotient eſt à l'unité comme la grandeur diviſée au diviſeur, car (*Def.* 5.) le quotient renferme autant de fois l'unité que la grandeur diviſée contient le diviſeur; donc en général $\frac{ab}{a} = \frac{b}{1}$.

DEFINITION XI.

On appelle raiſons inégales celles dont l'antécedent ne

contient pas ſon conſéquent comme l'autre, ou bien ces raiſons ſont inégales dont les antécedens diviſez par leurs conſéquens donnent des quotiens inégaux.

COROLLAIRE I.

Donc de deux grandeurs inégales, la plus grande a un plus grand rapport avec une troiſiéme, que la plus petite; car en diviſant ces deux grandeurs inégales par la même troiſiéme, il réſultera un plus grand quotient de la grande que de la petite.

COROLLAIRE II.

Le rapport au contraire d'une même troiſiéme grandeur, à la plus grande des grandeurs inégales, eſt moindre que celui de cette même troiſiéme grandeur à la plus petite; car le quotient qui réſulteroit de cette troiſiéme grandeur diviſée par la plus grande, ſeroit plus petit, que celui qui réſulteroit de cette même troiſiéme diviſée par la plus petite des grandeurs inégales.

COROLLAIRE III.

De deux grandeurs inégales celle-là eſt la plus grande qui a un plus grand rapport à une troiſiéme, ou à laquelle une même troiſiéme a un moindre rapport.

DEFINITION XII.

On appelle *rapport compoſé* celui du produit des antécedens de deux ou pluſieurs raiſons, au produit de leurs conſéquens; par exemple le rapport de $a\,c$, à $b\,d$, ou bien $\frac{a\,c}{b\,d}$ eſt compoſé des rapports de A à B & C à D, ou bien de $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

DEFINITION XIII.

Rapport doublé, ou *raiſon doublée* eſt un rapport compoſé de deux rapports égaux; *rapport triplé*, eſt un rapport compoſé de trois rapports égaux, &c. Par exemple, le rapport de 27 à 9 étant compoſé du rapport de

27 à 9 & de 9 à 3 qui ſont des rapports égaux, eſt un rapport doublé.

AVERTISSEMENT.

Il y a bien de la différence entre un rapport doublé & un rapport double, &c. Le rapport doublé eſt compoſé de deux rapports égaux; mais le double eſt celui dont l'antecédent eſt le double du conſéquent; ainſi le rapport de a^2 à b^2 eſt doublé, & celui de $2a$ à a eſt double.

DEFINITION XIV.

On appelle proportion ou analogie, la ſimilitude ou l'égalité de deux rapports; on écrit une proportion de cette maniére, 24. 6 :: 16. 4. On appelle proportionnels les termes 24, 6, 16, 4.

COROLLAIRE I.

On peut exprimer les grandeurs proportionnelles par cette formule $\frac{24}{6} = \frac{16}{4}$, parce qu'elle ſignifie (*Cor.* 4. *Déf.* 10.) la même choſe que 24. 6 :: 16. 4.

COROLLAIRE II.

Comme (*Cor.* 3. *déf.* 10.) le rapport du produit à la grandeur multipliée, eſt le même que celui du multiplicateur à l'unité; en général $ab.a :: b.1$. ce qui ſignifiera la même choſe que $\frac{ab}{a} = \frac{b}{1}$, en prenant b pour multiplicateur.

DEFINITION XV.

On appelle proportion continuë, celle dont les termes ſont réduits à trois, à cauſe de l'égalité des termes moyens, & on l'exprime par ce ſigne ÷, par exemple pour ſignifier que 9. 6 :: 6. 4, on écrit ÷ 9. 6. 4.

DEFINITION XVI.

On appelle diſproportion, l'inégalité des rapports.

Avant que de passer aux regles des proportions, il faut démontrer quelques propositions qu'on appelle Lemme : on entend par *Lemme* la démonstration de quelque proposition qui rend plus courte & plus facile la démonstration de ce que l'on cherche.

LEMME I.

Le produit du diviseur par le quotient est toujours égal à la grandeur divisée.

DÉMONSTRATION.

Le produit du diviseur par le quotient est (*Cor.* 3. *déf.* 10.) au diviseur, comme le quotient à l'unité. Mais (*Cor.* 4. *déf.* 10.) le quotient est à l'unité, comme la grandeur divisée, au diviseur : donc (*Cor.* 2. *déf.* 10.) le produit du diviseur par le quotient est égal à la grandeur divisée. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il résulte de là, que si on divise le produit par l'une des deux racines dont il est formé, l'autre racine sera le quotient ; car si on multiplie par le quotient, la racine par laquelle on divise ce produit, ce qui en résultera sera égal à la grandeur divisée.

AVERTISSEMENT.

On voit par ce qui vient d'être démontré, la raison de l'opposition qui se trouve entre la multiplication & la division qui se détruisent, & se servent mutuellement de preuves.

LEMME II.

De quelque maniére qu'on multiplie deux grandeurs l'une par l'autre, il en réſultera toujours le même produit.

DEMONSTRATION.

De quelque maniére qu'on multiplie les deux grandeurs *a* & *b*, les produits *ab*, ou *ba*, ſeront toujours égaux; car (*l'hyp.*) *ab* eſt le produit de *a* multiplié par *b*; donc (*Cor.* 2. *Déf.* 14.) *ab. a* :: *b.* 1. De même ſi *ba* eſt le produit (*l'hyp.*) de *b* par *a*, & qu'on ſuppoſe qu'il eſt diviſé par *a*, le quotient ſera *b*, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Déf.* 14.) *ba. a* :: *b.* 1. Donc *ab. a* :: *ba. a*. Donc (*Cor.* 2. *Déf.* 10.) *ab* = *ba*: ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Donc ſi de trois grandeurs *a*, *b*, *c*, on fait deux produits *abc*, & *bac*, ils ſeront égaux; car ils ſeront compoſés de *ab* & *ba* multipliés par *c*. On peut de même démontrer que de quelque maniere qu'on multiplie tant de grandeurs qu'on voudra, les produits qui en réſulteront ſeront toujours égaux.

LEMME III.

Les grandeurs qu'on multiplie également demeurent dans le même rapport.

DEMONSTRATION.

Si on multiplie ces deux grandeurs *a* & *b*, par la même *c*, les produits *ac* & *bc*, qui en réſultent, ſont entre eux, comme ces grandeurs multipliées. Car ſuppoſons que le quotient de la grandeur *a* diviſée par *b*, eſt *q*; *bq* (*Lem.* 1.) ſera = *a*, & par conſéquent *cbq* = *ca*. Donc le quotient de *ca* diviſé par *cb* ſera le même que le quotient de

cbq diviſé par cb. Mais (*Cor. Lem.* 1.) le quotient de cbq diviſé par cb eſt q. Donc q eſt auſſi le quotient de ca diviſé par cb; & ainſi le quotient de ca diviſé par cb eſt le même que celui de a diviſé par b. Donc (*Cor.* 4. *Def.* 10.) non ſeulement $a \cdot b :: q \cdot 1$; mais auſſi $ca \cdot cb :: q \cdot 1$, & par conſéquent $ca \cdot cb :: a \cdot b$; ou bien (*Lem.* 2.) $ac \cdot bc :: a \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de là, que la valeur d'une fraction n'eſt point changée, lorſqu'on multiplie ſes deux termes par la même troiſiéme, ou par des grandeurs égales, & que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

LEMME IV.

Les quotiens de différentes grandeurs diviſées par la même, ſont entre eux comme les grandeurs diviſées.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que p eſt le quotient de a diviſé par c, & q le quotient de b diviſé par c, c'eſt-à-dire, que $\frac{a}{c} = p$ & $\frac{b}{c} = q$: je dis que $p \cdot q :: a \cdot b$; car (*l'hyp.*) p & q ſont les quotiens des diviſions $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$. Donc (*Lem.* 1.) $pc = a$ & $qc = b$. par conſéquent $pc \cdot qc :: a \cdot b$. & (*Lem.* 3.) $p \cdot q :: a \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

On ne change donc point la valeur d'une fraction en diviſant ſes deux termes par la même grandeur.

COROLLAIRE II.

On peut donc réduire les termes d'une fraction à de plus petits, en les diviſant par un diviſeur commun, & ces termes ſeront d'autant plus petits que le diviſeur ſera plus grand.

LEMME V.

Les quotiens d'une même grandeur diviſée par différentes grandeurs, ſont entre eux comme les diviſeurs.

DEMONSTRATION.

Si p eſt le quotient de a diviſé par b, & q le quotient de a diviſé par c, $p \cdot q :: c \cdot b$; car puiſque (*l'hyp.*) p & q ſont les quotiens de a diviſé par b & par c, $pb = a$ (*Lem.* 1.) & $qc = a$. Donc (*Ax.* 18.) $pb = qc$, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Déf.* 10.) $pb \cdot qb :: qc \cdot qb$. Mais (*Lem.* 3.) $pb \cdot qb :: p \cdot q$. & $qc \cdot qb :: c \cdot b$. Donc $p \cdot q :: c \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME VI.

Premiérement le produit des extrémes de quatre grandeurs proportionnelles, eſt toujours égal au produit des moyennes.

Secondement ſi le produit des extrémes de quatre grandeurs, eſt égal au produit des moyennes, ces quatre grandeurs ſont proportionnelles.

DEMONSTRATION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Si $a \cdot b :: c \cdot d$, $ad = bc$; car (*Lem.* 3.) $ac \cdot bc :: a \cdot b$, & $ac \cdot ad :: c \cdot d$; mais (*l'hyp.*) $a \cdot b :: c \cdot d$. Donc $ac \cdot bc :: ac \cdot ad$. Donc (*Cor.* 2. *Def.* 10.) $ad = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si quatre grandeurs, a, b, c, d ſont telles que ad ſoit $= bc$, ces quatre grandeurs ſont proportionnelles, & $a \cdot b :: c \cdot d$; car pour lors (*Cor.* 1. *Def.* 10.) $ac \cdot bc :: ac \cdot ad$. Mais (*par le Lem.* 3.) $ac \cdot bc :: a \cdot b$, & $ac \cdot ad :: c \cdot d$. Donc $a \cdot b :: c \cdot d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Puiſque le produit des extrémes de quatre grandeurs proportionnelles, eſt égal au produit des moyennes, ſi on diviſe ces deux produits par la même grandeur, les quotiens qui en réſulteront ſeront égaux. Donc ſi on diviſe le produit des moyennes proportionnelles par le premier terme, le quotient ſera le quatriéme.

COROLLAIRE II.

De là naît la méthode de trouver une quatriéme grandeur proportionnelle inconnuë, lorſque trois ont été données. On appelle cette méthode, la régle de proportion, ou régle de trois, & quelquefois régle d'or, à cauſe de ſa grande utilité.

Il y a deux ſortes de régles de proportion, la ſimple & la compoſée, ou complexe. La ſimple eſt celle qui ne contient que 3 termes connus, & la compoſée eſt celle qui en contient plus de trois.

La régle de proportion ſimple eſt encore de deux ſortes, ſavoir, la directe & l'indirecte.

La régle de proportion directe eſt celle dans laquelle le premier terme eſt au ſecond, comme le troiſiéme eſt au quatriéme qu'on cherche; ou, ce qui eſt la même choſe, lorſque le rapport du premier terme au troiſiéme, eſt égal au rapport du ſecond au quatriéme; c'eſt-à-dire, ſi le troiſiéme terme eſt plus grand que le premier, le quatriéme qu'on cherche, doit être dans la même proportion, plus grand que le ſecond; & ſi le troiſiéme terme eſt plus petit que le premier, le quatriéme doit pareillement être plus petit, à proportion, que le ſecond.

La régle de proportion indirecte eſt celle dans laquelle le rapport du premier terme au troiſiéme eſt égal au rapport du quatriéme qu'on cherche au ſecond. Enfin on connoît la régle de proportion indirecte, & on la diſtingue d'avec la directe, lorſque le ſens de la queſtion va du plus au moins, ou du moins au plus, c'eſt la régle

indirecte ; mais lorſque le ſens de la queſtion va du plus au plus, ou du moins au moins, c'eſt la régle directe.

Lorſqu'on rencontre une queſtion qui appartient à la régle de proportion ſimple, ſoit qu'elle ſoit directe ou indirecte, afin de ſavoir quel doit être le premier, le ſecond & le troiſiéme terme, il les faut diſpoſer de telle maniére que le premier & le troiſiéme ſoit de même nom, de même que le ſecond & le quatriéme.

Exemple de la régle de proportion directe.

Si 14 perſonnes dépenſent 98 liv. en un certain tems ; combien dépenſent 20 perſonnes en autant de tems ? Pour réſoudre cette queſtion, il faut examiner ſi elle appartient à la régle de proportion directe ou à l'indirecte. Le but de la queſtion fait connoître qu'il s'agit d'une régle de proportion directe ; on arrange les termes de cette maniére.

Si 14 perſonnes dépenſent 98 liv. combien 20 perſ. ?

Il faut trouver un quatriéme terme ou nombre proportionnel aux trois autres, qui ſont connus. J'appelle x ce quatriéme terme, ainſi l'analogie eſt 14. 98 :: 20. x ; & pour trouver ce quatriéme terme, il faut multiplier le troiſiéme qui eſt 20 par le deuxiéme qui eſt 98, & diviſer le produit 1960 qui en réſulte par 14, & le quotient 140 eſt le quatriéme terme qu'on cherchoit.

Exemple de la régle de proportion indirecte.

Suppoſons qu'il y ait dans une place aſſiégée 4000 ſoldats pour ſa défenſe, & qu'il n'y ait de vivres que pour 8 mois ; que le Gouverneur ait été averti qu'on ne peut lui donner du ſecours pour faire lever le ſiége que dans 10 mois, on demande quel nombre de ſoldats il doit mettre hors de la place, afin de ſoutenir le ſiége pendant ces 10 mois, ſans rien diminuer de ce qu'il donnoit chaque

jour ; à chaque ſoldat. Le but de la queſtion fait connoître que plus il y aura de tems, moins il faudra de ſoldats pour pouvoir continuer de la même maniére l'uſage des proviſions, c'eſt pour cela qu'on arrangera les termes de cette ſorte, en nommant x le nombre de Soldats que l'on cherche.

10 mois ſont à 4000 ſoldats comme 8 mois à x.

On trouvera en opérant comme dans l'exemple précédent, que le Gouverneur doit ſeulement conſerver 3200 ſoldats & renvoyer les autres 800.

Exemple de la régle de proportion compoſée.

Si 12 ouvriers font un foſſé de 20 toiſes en 5 jours, on demande en combien de jours 8 ouvriers en feront un de 8 toiſes ? pour réduire cette queſtion à une queſtion ſimple, on mettra les termes dans cet ordre :

12 ouvriers 5 jours. 20 toiſes : : 8 ouvriers, x jours. 8 toiſes,

& ainſi cette queſtion ſe réduira à une régle de proportion ſimple qui ſera :

60 ouvriers. 20 toiſes : : 8 ouvriers x. 8 toiſes.

On voit clairement que c'eſt un des termes moyens, ſavoir, la valeur du ſecond antécédent qu'on cherche. On le trouve en multipliant le premier par le dernier, & diviſant le produit par le terme moyen connu, on a pour quotient de cette diviſion le troiſiéme terme de la proportion ; mais par la maniére de réduire cette queſtion compoſée à une régle ſimple, on connoît que ce troiſiéme terme eſt un produit dont le nombre 8 eſt une des racines ; en diviſant ce troiſiéme terme par 8, le quotient de cette diviſion fait connoître l'autre racine, ſavoir 3, qui exprime le nombre des jours qu'il faut à 8 ouvriers pour faire 8 toiſes.

On peut de même réſoudre par les principes qu'on vient d'établir, pluſieurs autres queſtions qu'on trouve dans les traités particuliers d'Arithmétique ; nous nous contenterons de donner un exemple de la régle de Compagnie ; car les régles qu'ils appellent d'alliage & de fauſſes poſi-

tions

tions ſont réſoluës beaucoup plus facilement par les équations dont nous parlerons dans le quatriéme Livre de cet abrégé.

De la Régle de Compagnie.

La Régle de Compagnie ou de Societé, eſt une opération par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.

Il y a deux ſortes de Régles de Compagnie, ſavoir ; la ſimple & la compoſée. La Régle de Compagnie ſimple eſt celle où l'on n'a point égard au tems, & la compoſée eſt celle où on a égard à divers tems.

Exemple de la Régle de Compagnie ſimple.

Trois perſonnes ont fait une bourſe commune pour acheter ou faire faire des marchandiſes, le premier a mis 420 liv., le ſecond 230 liv., & le troiſiéme 70 liv., & après leur négociation ils ont gagné tous enſemble 300 livres. Ils demandent à partager ce profit entre eux à proportion de l'argent que chacun a mis.

Gain 300 liv. { 420 liv. miſe du premier. / 230 liv. miſe du ſecond. / 70 liv. miſe du troiſiéme.

Total des miſes 720 liv.

Pour réſoudre cette queſtion & toutes les autres ſemblables, il faut faire autant de régles de proportion comme il y a de miſes, & mettre pour premier terme la ſomme de toutes les miſes ; pour deuxiéme, le gain ou profit, & pour chaque troiſiéme terme, la ſomme que chacun a payé.

Exemple de la Régle de Compagnie compoſée.

Trois perſonnes ſe ſont aſſocié & ont pris réſolution de négocier : le premier a employé 1200 liv., & après que

quatre mois ont été finis, il a retiré ſon argent; le ſecond a employé 950 liv. pour ſix mois, & le troiſiéme a employé 600 liv. pour dix mois; ils ont gagné 1400 liv. on demande combien il en doit appartenir à chacun à proportion de l'argent qu'il a employé, & du tems qu'il l'a laiſſé en commerce.

Pour réſoudre cette queſtion, il faut multiplier la miſe du premier par le tems qu'a ſervi ſon argent, il faut faire de même du ſecond & troiſiéme, & pour premier terme de chaque opération, il faut mettre la ſomme totale des miſes multipliées par les tems, pour ſecond terme, le gain commun, & pour troiſiéme terme la ſomme que chacun a miſe multipliée par le tems, ce qui ſe réduit à une Régle de Compagnie ſimple, dans laquelle on opére comme on a enſeigné dans le premier exemple.

AVERTISSEMENT.

Le ſixiéme Lemme eſt non ſeulement la baſe & le fondement de la Régle de Trois, & de toutes celles qui en dépendent; mais encore des régles des proportions dont nous devrions parler ici; mais comme nous en ferons un plus grand uſage dans le Traité ſuivant de Géométrie, que dans celui-ci, nous nous contenterons d'ajoûter à ce que nous avons dit, quelque choſe des fractions, de l'extraction des racines, & des équations; nous avons jugé plus à propos de donner les régles des proportions de la Géométrie.

CHAPITRE SECOND.

Des Fractions.

DEFINITION XVII.

UNE fraction eſt une diviſion indiquée ſeulement, c'eſt-à-dire, dont on exprime le quotient en écrivant la grandeur à diviſer au-deſſus du diviſeur, avec une petite ligne interpoſée ; par exemple, pour exprimer le quotient de 5 diviſé par 8, on écrit $\frac{5}{8}$, ce qui ſignifie cinq huitiémes.

DEFINITION XVIII.

On appelle dénominateur d'une fraction, la grandeur inferieure à la ligne interpoſée, parce qu'elle dénomme les parties de la fraction ; la grandeur ſupérieure eſt appellée Numérateur, parce qu'elle exprime combien il y a de ces parties dans la fraction.

On fait à l'égard des fractions les mêmes opérations qu'on vient de faire pour les nombres entiers ; Mais avant d'en venir à la pratique, il faut remarquer. 1°. Que pour réduire une fraction à de moindres termes, c'eſt-à-dire, pour exprimer une fraction par des termes plus ſimples ; par exemple, pour trouver une fraction équivalente à $\frac{6}{18}$ & qui ſoit exprimée par des chiffres moindres que 6 & 18, il faut chercher un nombre par lequel on puiſſe diviſer également le Numérateur & le Dénominateur ſans aucun reſte comme 6 ; car on trouve que 6 peut diviſer 6 & 18 ſans reſte, on mettra le quotient de 6 diviſé par 6 pour numérateur de la nouvelle fraction, & le quotient de 18 diviſé par 6 pour dénominateur, & on aura $\frac{1}{3}$ pour la nouvelle fraction qui vaut autant que $\frac{6}{18}$.

Pour trouver facilement le diviſeur commun, il faut diviſer le plus grand des deux nombres qui expriment

la fraction, par le plus petit, & s'il reſte quelque choſe, le nombre qui a ſervi de diviſeur à la diviſion précedente, ſera diviſé par ce reſte ; & ſi après cette diviſion il reſte encore quelque nombre, ce ſera un nouveau diviſeur pour le nombre qui a ſervi de diviſeur à la diviſion précedente. On continuera de même juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à quelque diviſion où il ne reſte rien ; le dernier de ces diviſeurs ſera le diviſeur commun au numérateur & au dénomiateur de la fraction propoſée.

Soit, par exemple, cette fraction $\frac{45}{72}$, il faut diviſer 72 par 45, il reſtera 27, enſuite on diviſera 45 par le reſte 27, il reſtera 18, on diviſera encore 27 par 18, il reſtera 9 ; & enfin on diviſera 18 par 9, & il ne reſtera rien, ce qui fera connoître que 9 ſera le plus grand diviſeur commun du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{45}{72}$, qui ſera réduite par ce moyen à ſon équivalente $\frac{5}{8}$. Mais s'il arrivoit qu'après avoir fait toutes ces diviſions, il y eut pour reſte 1, ce ſeroit une marque que la fraction ne pourroit être réduite à de moindres termes.

S'il ſe rencontroit un ou pluſieurs 0 à la fin du numérateur & du dénominateur d'une fraction ; on réduira facilement cette fraction à moindres termes, en ôtant autant de zeros de la fin du numérateur, que de la fin du dénominateur ; par exemple, cette fraction $\frac{400}{500}$ ſera réduite à ſon équivalente ou égale $\frac{4}{5}$, en retranchant de part & d'autre 00 : puiſque c'eſt la même choſe que ſi on diviſoit le numérateur 400 & le dénominateur 500 par le nombre 100. Si on ôtoit ſeulement un zero, ce ſeroit diviſer par 10, &c.

2°. Il faut obſerver que pour réduire deux fractions à même dénomination, il faut multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, enſuite le numérateur de l'une par le dénominateur de l'autre ; par exemple, pour réduire $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ à une même dénomination, il faut multiplier 3 par 4, & le produit 12 ſera le dénominateur commun. Enſuite on multipliera le numérateur 2 d'une fraction par le dénomi-

nateur 4 de l'autre, & on aura 8 qu'on écrira au-deſſus du 2; enfin on multipliera le dénominateur 3 par le numérateur 3, on aura 9 qu'on écrira ſur le 3, & on aura au lieu de $\frac{2}{3}$ ſon égale $\frac{8}{12}$, & au lieu de $\frac{3}{4}$ on aura ſon égale $\frac{9}{12}$. Or $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ ſont en même dénomination: ce qu'il falloit chercher.

8 9
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ ($\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$
12

Lorſqu'il y a plus de deux fractions; par exemple, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, il faut multiplier tous les dénominateurs de ſuite l'un par l'autre, comme dans cet exemple; 3 fois 4 ſont 12, & 5 fois 12 ſont 60 qui ſera le dénominateur commun; & pour avoir les numérateurs, on prendra pour numérateur de la premiere fraction les deux tiers de 60, ſavoir 40; pour le numérateur de la ſeconde, on prendra les trois quarts de 60, ſavoir 45; & pour le numérateur de la troiſiéme, on prendra les quatre cinquiémes de 60: on fera de même lorſqu'il y aura un plus grand nombre de fractions. On trouvera $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{5}$; la raiſon de cela eſt facile à comprendre, parce qu'en cet exemple on conſidere le tout ou l'entier diviſé par 60 parties égales. Ainſi lorſqu'on prendra les deux tiers de 60, on aura les deux tiers d'un entier; ce qui eſt la même choſe que la premiére fraction: on dira la même choſe des autres.

3°. Il faut remarquer que pour connoître la valeur d'une fraction par rapport à l'entier, dont elle exprime une ou pluſieurs parties; par exemple, pour connoître la valeur de $\frac{3}{4}$ d'une livre, il faut multiplier 20 ſols, valeur de la livre, par le numérateur 3 de la fraction, & diviſer le produit 60 par le dénominateur 4 de la fraction, le quotient de cette diviſion ſera 15 ſols, qui eſt la valeur cherchée; parce que les trois quarts d'une livre ſont la même choſe que le quart de trois livres.

4°. Il faut remarquer que pour réduire des entiers ou unités en fractions, il faut multiplier le nombre de ces unités par le dénominateur de la fraction, dans laquelle on les veut réduire; par exemple, pour réduire 4 en cin-

quiémes, il faut multiplier 4 par 5, on aura 20, auquel on mettra 5 pour dénominateur, & on aura $\frac{20}{5}$. Cela eſt évident, puiſque chaque unité vaut 5 cinquiémes, quatre quarts, dix dixiémes, &c.

Réciproquement enfin pour réduire des fractions en entiers, lorſque cela eſt poſſible, il faut diviſer le numérateur par le dénominateur, & le quotient de cette diviſion exprimera combien la fraction vaut d'entiers ; par exemple, pour ſavoir combien cette fraction $\frac{15}{5}$ vaut d'entiers, en diviſant 15 par 5, on trouvera que cette fraction vaut 3 entiers, puiſqu'il faut 5 cinquiémes pour faire un entier, ou 6 ſixiémes, ou 14 quatorziémes, &c.

De l'addition des fractions.

Si les fractions qu'on veut aſſembler ſont en même dénomination ; par exemple, $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$, il faut aſſembler les numérateurs, & ſouſcrire à leur ſomme leur dénominateur commun, & on aura $\frac{7}{5}$.

Si les fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y réduire, & enſuite aſſembler les numérateurs, comme on vient d'enſeigner ; par exemple, pour aſſembler $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, on trouvera leurs équivalentes $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ en même dénomination : on fera l'addition de 8 & de 9 & on aura $\frac{17}{12}$ pour la ſomme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$; ce qui eſt la même choſe qu'un entier & $\frac{5}{12}$.

De la ſouſtraction des fractions.

On peut ſouſtraire ou retrancher une fraction d'une autre fraction, ou d'un ou de pluſieurs entiers.

Pour ſouſtraire une fraction, par exemple, $\frac{3}{7}$ d'une autre faction $\frac{5}{7}$ de même dénomination ; il faut ſouſtraire le numérateur 3 de l'autre numérateur 5, & on aura pour reſte $\frac{2}{7}$.

Si les fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y réduire, & ſouſtraire enſuite le numérateur de l'une du numérateur de l'autre.

Pour retrancher une fraction d'un, ou de plusieurs entiers, il faut réduire ces entiers en fraction de même dénomination que la fraction qu'on veut retrancher. Ensuite on soustrait le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre, comme on vient d'enseigner : par exemple, pour soustraire $\frac{4}{5}$ de 3, après avoir réduit les 3 en cinquiémes, on aura $\frac{15}{5}$ dont $\frac{4}{5}$ étant ôtés, reste $\frac{11}{5}$ & ainsi des autres.

On peut voir facilement par ce moyen laquelle de deux fractions inégales est la plus grande, & de combien l'une excede l'autre. On trouvera, par exemple, que $\frac{3}{4}$ excede $\frac{2}{3}$ de la valeur de $\frac{1}{12}$.

Pour faire la preuve de l'addition des fractions, il faut retrancher du total chaque fraction qui a été assemblée, & s'il ne reste rien, l'addition est bonne.

Pour faire la preuve de la soustraction des fractions, il faut ajoûter ce qu'on trouve qui reste avec ce qu'on a retranché, & le total doit être égal à la fraction dont on a retranché. Ces peuves ont le même fondement que dans les nombres entiers.

De la Multiplication des Fractions.

On peut multiplier des fractions par des fractions, ou des entiers par des fractions ; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour multiplier des fractions l'une par l'autre, il faut multiplier leurs numérateurs l'un par l'autre ; le produit qui en résultera sera le numérateur de la fraction qu'on cherche pour produit ; il faut ensuite multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, & le produit sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche. Par exemple, pour multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{8}$, on aura pour produit $\frac{12}{40}$, & après l'avoir réduit à moindres termes, on aura $\frac{3}{10}$.

Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on réduira ce nombre en fraction, ce qu'on peut faire en deux maniéres, ou en mettant à ce nombre pour dénominateur 1, ou en le multipliant par le dénominateur de la fraction, comme on a enseigné. Ensuite on fera la mul-

riplication de ces deux fractions. Par exemple, pour multiplier 4 par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{4}{1}$ par $\frac{2}{3}$, & on aura pour produit $\frac{8}{3}$.

Pour multiplier des entiers & fractions par des entiers & fractions; par exemple pour multiplier $5\frac{1}{2}$ par $3\frac{2}{5}$, il faut réduire $5\frac{1}{2}$ dans une seule fraction, savoir $\frac{11}{2}$. Il faut pareillement réduire $3\frac{2}{5}$ en une seule fraction $\frac{17}{5}$. Ensuite on multipliera $\frac{11}{2}$ par $\frac{17}{5}$, ce qui est la même chose que de multiplier 5 & $\frac{1}{2}$ par 3 & $\frac{2}{5}$, on aura pour produit $\frac{187}{10}$.

De la division des fractions.

On peut diviser une fraction par une fraction, ou des entiers par une fraction, ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour diviser une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur de la fraction qui tient lieu de diviseur, & ce produit sera le numérateur de la fraction qui est le quotient cherché; par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, il faut multiplier le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 4 de la fraction $\frac{3}{4}$, on aura 8 pour le numérateur du quotient, & on multipliera le dénominateur 3 de la fraction à diviser $\frac{2}{3}$ par le numérateur 3 du diviseur $\frac{3}{4}$, & on aura 9 pour dénominateur du quotient cherché, qui est $\frac{8}{9}$.

Pour diviser un entier par une fraction, on réduira cet entier en fraction, en mettant 1 pour dénominareur : par exemple, pour diviser 3 par $\frac{4}{5}$, c'est la même chose que si on divise $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$, ce qu'on fera, comme on vient d'enseigner, & on aura pour quotient $\frac{15}{4}$.

Pour diviser des entiers & des fractions par des entiers & des fractions, on réduira l'entier & la fraction à diviser en une seule fraction. On réduira pareillement l'entier & la fraction qui tient lieu de diviseur, en une seule fraction, & on fera ensuite la division, comme on vient d'enseigner. Par exemple pour diviser $6\frac{1}{2}$ par $5\frac{2}{3}$, c'est diviser $\frac{13}{2}$ par $\frac{17}{3}$, & on aura $\frac{39}{34}$ pour quotient.

La

La preuve de la multiplication des fractions se fait comme dans les nombres entiers, en divisant le produit par une des fractions qui a été multipliée ; & on doit trouver pour quotient l'autre fraction qui a été multipliée, si on a bien réussi.

On fait aussi la preuve de la division des fractions comme dans les nombres entiers, en multipliant la fraction qui est le quotient cherché, par la fraction qui est le diviseur ; si on a bien réussi, le produit de cette multiplication est égal à la fraction à diviser.

Le produit d'une multiplication de fractions, est plus petit que chacune des deux fractions qui ont été multipliées l'une par l'autre ; & le quotient d'une division de fractions, est plus grand que la fraction à diviser ; mais cela doit être ainsi ; car (*Cor.* 3. *Déf.* 10.) le produit doit être à l'une des deux racines dont il est formé, comme l'autre racine est à l'unité ; mais cette racine étant une fraction, elle est plus petite que l'unité. Donc ce produit doit aussi être plus petit que l'autre racine.

Le quotient d'une fraction divisée par une autre, doit aussi être plus grand que la fraction divisée ; car (*Cor.* 4. *Déf.* 10.) le quotient est à la grandeur divisée, comme l'unité au diviseur ; mais le diviseur étant une fraction, est plus petit que l'unité. Donc la grandeur divisée doit aussi être plus petite que le quotient.

S'il se rencontre des fractions de fractions : par exemple $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, pour les réduire à une fraction simple, c'est-à-dire, pour connoître quelle est la fraction, qui vaut les deux tiers de quatre cinquiémes ; il faut multiplier séparément le numérateur & le dénominateur de $\frac{4}{5}$, par le dénominateur 3 de $\frac{2}{3}$, alors on aura $\frac{12}{15}$ qui est la même chose que $\frac{4}{5}$, puisqu'en réduisant $\frac{12}{15}$ à moindres termes, on trouve $\frac{4}{5}$. Or prenant 2 fois le tiers de $\frac{12}{15}$, on trouve $\frac{8}{15}$ qui est la valeur cherchée des deux tiers de $\frac{4}{5}$.

Après avoir multiplié le dénominateur 5 de la fraction $\frac{4}{5}$ par 3 dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$, on pouvoit se contenter de multiplier le numérateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$,

par le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$, on auroit auſſi eu $\frac{8}{15}$, parce que ce numérateur 2 marque deux parties de ſon dénominateur 3, au lieu que lorſqu'on multiplie 3 par 4, on a $\frac{12}{15}$ dont on ne demande que 2 de ſes trois parties égales, qu'on trouve en multipliant ſeulement 2 par 4.

Pour réduire donc des fractions de fractions à des fractions ſimples, il faut multiplier les numérateurs de ſuite l'un par l'autre; ce produit ſera le numérateur de la fraction ſimple cherchée. On multipliera auſſi de ſuite les dénominateurs l'un par l'autre, & ce produit ſera le dénominateur commun de la fraction ſimple qu'on cherche. Par exemple, pour connoître la valeur ou la fraction ſimple de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, je dirai: 2 fois 3 ſont 6, & 5 fois 6 ſont 30. Enſuite 3 fois 4 ſont 12, & 6 fois 12 ſont 72; & la fraction ſimple cherchée eſt $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

LIVRE TROISIEME.

De l'Extraction des Racines.

DEFINITION XIX.

Racine eſt une grandeur, qui étant multipliée par elle-même ou par une autre, produit une autre grandeur; par exemple, a eſt racine du produit ab, ou du produit aa, ou a^3. La grandeur b eſt auſſi racine.

DEFINITION XX.

Puiſſance ou dégré d'une grandeur, eſt le produit de cette même grandeur multipliée une ou pluſieurs fois par elle-même; par exemple bb, c^3, f^4 &c. ſont les puiſſances de b, c, f &c.

DEFINITION XXI.

Le produit d'une grandeur multipliée par 1, par exemple, 1 *a* ou *a*, eſt appellé premiere puiſſance ; multipliée par elle-même une fois, ſeconde puiſſance ; multipliée par ſon quarré, troiſiéme puiſſance ou cube, &c.

DEFINITION XXII.

On appelle grandeur quarrée celle qu'on peut partager en deux parties égales : par exemple, *ffgghh* eſt une grandeur quarrée. On dit auſſi qu'une grandeur eſt cube, lorſqu'on peut partager les lettres qui l'expriment, en trois parties égales, & ainſi des autres.

Lorſque la puiſſance dont on cherche la racine, eſt un quarré, on appelle ſa racine *quarrée*. Si cette puiſſance eſt un cube, ſa racine eſt appellée *racine cubique*.

Il eſt très-facile d'extraire les racines des grandeurs ſimples, ou qui s'expriment avec peu de lettres, comme *dd*, ou *ggg* ; mais pour extraire celles des grands nombres, il faut ſavoir les quarrés, les cubes, &c. de chaque chiffre depuis 1 juſqu'à 9, principalement les quarrés, parce qu'ils ſont plus d'uſage.

Racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
Quarrés	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100
Cubes	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000

Nous diviſerons ce Livre en deux Chapitres ; dans le premier nous parlerons de l'extraction des racines quarrées, & dans le ſecond de l'extraction des racines cubiques.

CHAPITRE PREMIER.

De l'extraction des racines quarrées.

POur trouver la racine quarrée de quelque nombre ; par exemple de 1369, il faut ſéparer ces chiffres de deux en deux, & commencer de droit à gauche, enſuite tirer une ligne au-deſſous, & à ſon extrémité on écrit les racines cherchées, de la même maniére qu'on écrit le quotient dans la diviſion.

Pour concevoir pourquoi il faut ainſi ſéparer ces chiffres, on n'a qu'à conſiderer que ſi un nombre eſt exprimé par plus de deux chiffres, ſa racine eſt exprimée par plus d'un chiffre ; parce que 100 eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimés par trois chiffres, & ſa racine qui eſt 10, eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimés par deux chiffres. Donc tous les nombres qui ſont au-deſſus de 100, ont une racine exprimée par plus d'un chiffre, & tous les nombres qui ſont au-deſſous de 100, c'eſt-à-dire, qui ſont exprimés par moins que trois chiffres, ont une racine quarrée moindre que 10, & par conſéquent ont une racine exprimée par un ſeul chiffre. Or quand il faut extraire la racine d'un nombre, il faut partager ce nombre en certaines parties telles qu'on y puiſſe trouver les plus grands quarrés, dont les racines ſoient exprimées chacune par un ſeul chiffre ; c'eſt pourquoi on commence de droit à gauche, & on ſépare ces chiffres de deux en deux ; parce que la racine d'un nombre quarré exprimé par deux chiffres, eſt toujours exprimée par un ſeul chiffre.

On cherche l'un après l'autre les chiffres qui expriment cette racine. On commence par le premier chiffre de cette même racine, qui eſt vers la main gauche, & qui eſt de plus grande valeur que les autres ; on continue de

gauche à droit. Ce premier chiffre étant trouvé, on s'en ſert pour trouver le ſecond ; les deux premiers étant conſiderés comme un ſeul nombre, ſervent à trouver le troiſiéme chiffre de la racine qu'on cherche ; les trois premiers conſiderés comme un ſeul nombre, ſervent à trouver le quatriéme chiffre, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'il ne reſte plus de chiffre à trouver.

C'eſt pour cela qu'on ne conſidére jamais la racine qu'on cherche, que comme une grandeur compoſée de deux parties $a + b$. a repreſente le chiffre, ou les chiffres trouvés, & b repréſente le chiffre qu'on cherche. Le quarré de cette grandeur $a + b$ qui eſt $aa + 2ab + bb$ ſert de regle dans les extractions des racines quarrées.

EXEMPLE.

Pour extraire la racine quarrée du nombre 1369, c'eſt-à-dire, pour trouver le nombre qui étant multiplié une fois par lui-même produiſe 1369.

Il faut ſéparer les chiffres de deux en deux ; enſuite il faut conſiderer qu'il y aura autant de chiffres pour exprimer la racine qu'on cherche, qu'il y a de tranches dans le nombre 1369 ; & comme il s'y trouve deux tranches de chiffres, ſavoir 13 & 69, cela marque qu'il n'y aura que deux chiffres pour exprimer cette racine cherchée, dont le premier chiffre eſt appellé a, & le ſecond b.

$$\begin{array}{r|l} \phi & \\ 4\,4\,\phi & \\ 3\,3\,\phi\,\phi & (37 \\ \hline \phi\,7 & \end{array}$$

$a = 3$

$b = 7$

Mais parce que le quarré de $a + b$, qui repréſente le nombre 1369, contient le quarré de a & 2 fois le produit de a multiplié par b, & le quarré b ; c'eſt pour cela que l'on doit faire l'extraction des racines de ces produits l'une après l'autre.

On trouve toujours dans la premiére tranche vers la main gauche, le quarré du premier chiffre de la racine cherchée ; c'eſt pourquoi je cherche la racine du quarré

qui approche le plus près de 13, & je trouve que c'eſt 3 racine de 9; j'écris 3 au rang des racines. Ce chiffre eſt repréſenté par a: je retranche enſuite de 13 le quarré aa, c'eſt-à-dire, 9 quarré de la racine 3 qu'on vient de trouver, il reſte 4 que j'écris ſur 3, j'efface 13, & je double le quotient 3, & j'ai 6 pour diviſeur, que j'écris ſous 46; après cela je dis, comme dans la diviſion: dans 46 combien de fois 6? il y eſt 7 fois, j'écris 7 au quotient, & au diviſeur après le chiffre 6, enſuite je multiplie 7 par 6, & j'ôte le produit 42 qui en réſulte, de 46; il reſte 4 que j'écris au-deſſus du 6 que j'efface, auſſi-bien que le 4 qui eſt au-deſſus du 3, il reſte 49; après cela je retranche le quarré de 7 qui eſt 49, & il ne reſte rien. Ainſi la racine quarrée de 1369 eſt 37.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

En ſuppoſant que le premier chiffre de la racine eſt $= a$, le ſecond $= b$; $a + b$ doit être $= 37$ & le quarré de $a + b$ doit repréſenter le nombre 1369; or le quarré de $a + b$, eſt $a^2 + 2ab + b^2$. Donc $a^2 + 2ab + b^2$ repreſente 1369. Mais pour extraire la racine du quarré $a^2 + 2ab + b^2$, il faut premiérement extraire la racine a du premier quarré a^2, & mettre cette racine au quotient, & au-deſſous du quarré a^2; enſuite il faut dire, comme dans la diviſion: a multiplié par a donne a^2; qui de a^2 ôte a^2, reſte rien; c'eſt pourquoi il faut effacer le quarré a^2 avec le diviſeur a. Après cela il faut prendre le double de la racine a, & diviſer $2ab$ par le double de cette racine a, ſavoir $2a$, & le quotient b qui en réſulte, doit être mis au-deſſous de b^2 & au quotient qui exprime la racine; enſuite il faut dire, $2a$ multipliés par b, donnent $2ab$, qui ôtés de $2ab$, reſte rien. On efface $2ab$ avec le diviſeur $2a$, & on paſſe au diviſeur b, & on dit; b multiplié par b, donne b^2, qui ôté de b^2, reſte rien. Donc la racine du quarré $a^2 + 2ab + b^2$ eſt

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \hline a^2 \quad 2a+b \end{array} \quad (a+b$$

$a + b$; mais le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ repréſente le nombre 1369, & $a = 3$ & $b = 7$. Donc la racine de 1369 eſt $= 37$. Ce qu'il falloit démontrer.

Afin de mieux s'exercer dans les commencemens qu'on étudie ces choſes, on peut prendre des racines à volonté & les quarrer ; & enſuite du quarré en extraire la racine ; comme on vient d'enſeigner.

On fait la preuve de cette opération, en multipliant la racine trouvée par elle-même, & ſi le produit eſt égal à la grandeur dont on a extrait cette racine, l'opération eſt bonne.

Si on veut extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut extraire les racines du numérateur & du dénominateur ſéparément, & la fraction qui réſultera de ces racines, ſera ce que l'on cherche : par exemple, $\frac{4}{7}$ eſt la racine quarrée de $\frac{16}{49}$; car en multipliant la fraction $\frac{4}{7}$ par elle-même, le produit eſt $\frac{16}{49}$. De même en general $\frac{a}{b}$ eſt la racine quarrée de la fraction $\frac{a2}{b2}$, parce que $\frac{a}{b}$ multiplié par $\frac{a}{b}$ donne $\frac{a2}{b2}$.

Lorſqu'un nombre n'eſt point quarré, on ne ſauroit trouver ſa racine quarrée ; mais on peut trouver la racine qui en approche le plus de la maniére ſuivante.

Pour trouver le nombre qui approche le plus de la racine du nombre qui n'eſt point quarré, il faut ajoûter à ce nombre autant de deux o que l'on voudra, plus l'on en ajoûtera, plus on approchera de ſa racine. Enſuite il faut diviſer la racine trouvée, de la maniére qu'on l'a enſeigné, par l'unité ſuivie d'autant de o qu'on a ajoûté de deux o au nombre propoſé, & le quotient ſera le nombre qui approche le plus de la racine qu'on cherche.

EXEMPLE.

Si on veut extraire la racine quarrée du nombre 12 ; il faut ajoûter pluſieurs couples de zeros, parce que ce nombre n'eſt pas quarré ; par exemple, deux couples, qui ſeront 120000. Enſuite il faut extraire la racine quarrée de ce nombre, comme on l'a enſeigné, on trouvera

pour quotient 346, & on négligera 284 qui reſtent, ou bien on y ajoûtera autant de couples de zeros que l'on voudra, pour trouver le nombre qui approche le plus de ſa racine; enſuite on diviſera le quotient 346 par 100, & le quotient, $\frac{346}{100}$, ou $3 + \frac{46}{100}$, ou $3 + \frac{23}{50}$ ſera le nombre qui approche le plus de la racine quarrée du nombre 12 qui n'eſt point quarré, & ainſi des autres.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

Puiſqu'on ajoûte au nombre propoſé pluſieurs couples de zeros, par exemple au nombre 12, 0000, c'eſt comme ſi on multiplioit ce nombre 12 par 10000 quarré de 100. Donc en conſidérant le nombre 12 comme quarré de la racine qu'on cherche, le produit 120000 ſera compoſé de deux quarrés multipliés l'un par l'autre, & par conſéquent cela ſera auſſi quarré, dont la racine quarrée ſera compoſée des racines quarrées des nombres 10000 & 12. Donc la racine quarrée de ce produit 120000 diviſée par 100 racine du quarré 10000, le quotient eſt la racine quarrée du nombre 12, & par conſéquent plus celle-là approchera de la vraie racine, plus auſſi celle-ci approchera de celle qu'on cherche.

CHAPITRE SECOND.

De l'extraction des racines cubiques.

POur connoître la racine cubique de quelque nombre, il faut premiérement ſéparer de trois en trois les chiffres qui expriment ce nombre, en commençant, comme dans l'extraction des racines quarrées, de droit à gauche, parce que 1000 eſt le plus petit des nombres cubes exprimés par plus de 3 chiffres, dont la racine cubique qui eſt 10, eſt auſſi la plus petite de celles qui ſont exprimées par pluſieurs chiffres. Donc tout nombre au-deſſous de 1000, c'eſt-à-dire exprimé par moins que 4 chiffres, a ſa racine cubique exprimée par un ſeul chiffre. Si on vouloit extraire la racine de la quatriéme puiſſance, on ſépareroit les chiffres de 4 en 4; pour la cinquiéme, de 5 en 5 &c., & on feroit le même raiſonnement.

Secondement il faut chercher dans la premiére tranche à gauche, le plus grand cube, & mettre ſa racine cubique au quotient, & après avoir ôté le cube de cette racine, du nombre contenu dans cette premiére tranche, il faut écrire au-deſſus ce qui reſte, comme dans la diviſion.

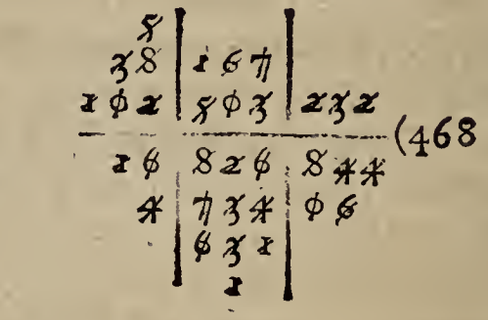
Troiſiémement il faut prendre pour diviſeur, le triple du quarré du quotient trouvé, & l'écrire au-deſſous du nombre dont on cherche la racine cubique, de maniére qu'il ne ſoit avancé que d'un chiffre du côté de la tranche ſuivante. Enſuite on cherche, comme dans la diviſion, combien de fois ce diviſeur eſt renfermé dans le nombre qui eſt au-deſſus, & on met au quotient le chiffre qui l'exprime. Après cela il faut ajoûter au diviſeur le triple du produit de ce chiffre par le premier en avançant d'un pas à droite, il faut encore ajoûter au diviſeur le quarré du ſecond chiffre en avançant auſſi d'un pas, de maniére

que le dernier chiffre de ce quarré, ſoit au-deſſous du dernier chiffre de la ſeconde tranche. Cela étant fait, il faut multiplier tout le diviſeur par le ſecond chiffre du quotient, & ôter le produit qui en réſulte, du nombre qui eſt au-deſſus, comme dans la diviſion.

Quatriémement il faut conſiderer les deux chiffres trouvés du quotient, comme un ſeul, & en avançant du côté de la troiſiéme tranche, il faut en faire le même uſage qu'on a fait du premier, & ainſi des autres; il y aura par conſéquent autant de chiffres au quotient, qu'il y a de tranches dans le nombre propoſé. Un exemple rendra cela plus clair.

EXEMPLE.

Pour extraire la racine cubique du nombre 102503232, il faut commencer vers la main gauche à la premiére tranche, diſant: la racine du nombre cube qui approche le plus près de 102, c'eſt 4 qu'il faut écrire au rang des chiffres de la racine qu'on cherche, c'eſt-à-dire au quotient; enſuite il faut prendre pour diviſeur le quarré de 4, qui eſt 16 qu'il faut écrire au-deſſous de 102, & dire comme dans la diviſion: quatre fois 16 ſont 64; qui de 102 ôte 64, reſte 38 qu'il faut écrire ſur 02, & effacer 102 avec le diviſeur 16. Après cela il faut prendre le triple du quarré de 4, qui eſt 16, & l'on aura 48 pour diviſeur qu'on écrira au-deſſous de 385: cela étant fait, il faut dire, comme dans la diviſion: 4 en 48 pourroit y être 9 fois; mais parce qu'on écrit jamais au quotient qu'un chiffre, dont le produit par le diviſeur, puiſſe être ôté du nombre qui eſt au-deſſus du diviſeur, c'eſt pour cela qu'on écrira que 6 au quotient, enſuite il faut multiplier 6 par le triple de 4, c'eſt-à-dire par 12, & ajoûter le produit 72 au diviſeur,



de maniére qu'il ſoit au-deſſous de 50 ; après cela il faut encore écrire le quarré de 6, ſavoir 36 au-deſſous de 03, & multiplier tout le diviſeur 826 + 4730 = 5556 par 6: le produit 33336 étant ôté du nombre 38503 qui eſt au-deſſus, il reſte 5167 qu'il faut écrire au-deſſus 8503 que j'efface auſſi-bien que le diviſeur.

Conſidérant enſuite les deux chiffres du quotient, ſavoir 46, comme un ſeul, il faut en faire le même uſage qu'on a fait du premier, qui eſt 4. C'eſt pourquoi prenant pour diviſeur le triple du quarré de 46 qui eſt 6348, il faut l'écrire au-deſſous de 51672, enſuite chercher, comme dans la diviſion, combien de fois 6 eſt dans le nombre 51 qui eſt au-deſſus ; l'on trouve qu'il y eſt huit fois, & le reſte ſuffit pour achever l'opération ; il faut donc écrire 8 au quotient, & multiplier 8 par le triple de 46, ſavoir 138 ; le produit 1104 qui en réſulte, doit être ajoûté au diviſeur au-deſſous de 6723, avec le quarré de ce même chiffre 8, qui eſt 64 au-deſſous de 32. Cela étant fait, il faut multiplier par le dernier chiffre du quotient le diviſeur total 645904 compoſé de tous ces nombres ; le produit 5167232 qui en réſulte étant ôté du nombre qui eſt au-deſſus, il ne reſte rien ; on efface tous les chiffres, & le quotient 468 trouvé par cette opération, eſt la racine cubique cherchée.

La preuve de l'extraction des racines cubiques ſe fait en multipliant par elle-même la racine trouvée, ce qui produit le quarré de cette racine, enſuite multipliant ce quarré par cette même racine trouvée, le produit de cette derniére multiplication, ſera le cube de cette racine, qui ſera égale au nombre propoſé ſi on a bien réuſſi dans l'opération. Si après l'extraction il reſte quelque choſe, il faut l'ajoûter au cube trouvé, de la maniére qu'on vient de l'enſeigner, & la ſomme doit être égale au nom-

bre dont on a voulu faire l'extraction, ſi on a bien opéré.

La démonſtration de l'opération préſente, ſe peut faire de la même maniére que celle de l'extraction des racines quarrées.

Lorſqu'on ne peut faire l'extraction de la racine d'un nombre ſans qu'il reſte quelque choſe, ſouvent on ſe contente d'exprimer cette racine par ce ſigne $\sqrt{\ }$, appellé ſigne radical, qu'on écrit devant ce nombre propoſé avec un chiffre, qui eſt l'expoſant de la racine dont il s'agit. Par exemple pour exprimer la racine quarrée, on écrit $\sqrt[2]{\ }$; la racine cubique $\sqrt[3]{\ }$ &c.

Il y a des racines qu'on ne peut exprimer que par le moyen de ce ſigne radical $\sqrt{\ }$, auquel on joint 2, ou 4, &c. pour expoſans de ces racines, on les nomme *racines ſourdes*.

Les racines imaginaires ou impoſſibles ſont celles des grandeurs entiérement négatives, & celles dont les expoſans peuvent être partagés en deux parties égales ſans fraction. Par exemple, $\sqrt{-38}$, ou $\sqrt{-12}$, &c. ſont des racines imaginaires; parce qu'on ne peut trouver aucune grandeur telle qu'elle puiſſe être, ſoit négative, ſoit poſitive, dont le quarré, ou la quatriéme puiſſance, ou la ſixiéme, &c. ſoient négatives; puiſque + par + donne + & — par — produit auſſi toujours +.

L'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des racines ſourdes, ſont d'un grand uſage dans la pratique de l'Algébre.

Pour aſſembler deux racines ſourdes, on les joint l'une avec l'autre par le ſigne +. Par exemple pour ajoûter la racine quarrée de 19 avec la racine quarrée de 23, on écrit $\sqrt{19+23}$; mais ſi ces racines ſont racines de différentes puiſſances, pour les aſſembler on les écrit en mettant à chacune le ſigne radical, & l'expoſant de la racine exprimée, & en interpoſant le ſigne + de cette maniére $\sqrt{7}+\sqrt[3]{14}$.

Pour retrancher une racine ſourde d'une autre, on écrit celle dont on veut retrancher, & enſuite on écrit l'autre précedée du ſigne —. Par exemple pour retrancher $\sqrt{29}$ de $\sqrt{52}$, on écrit $\sqrt{52} - \sqrt{29}$.

Pour multiplier des racines ſourdes l'une par l'autre, ſi elles ſont de même nom ; c'eſt-à-dire, ou l'une & l'autre quarrée, ou l'une & l'autre cubique &c. il faut multiplier l'une par l'autre les grandeurs dont on exprime les racines, & on prépoſe au produit le ſigne radical avec ſon expoſant, comme il l'étoit aux grandeurs multipliées. Par exemple pour multiplier $\sqrt{cd}$ par $\sqrt{fg}$, on écrit $\sqrt{cdfg}$; pour multiplier $\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, on écrit $\sqrt{54}$, parce que la racine de ce nombre 54 eſt le produit qu'on cherche.

COROLLAIRE.

Cette maniére de multiplier les racines ſourdes de même nom, découvre le fondement de la pratique dont on ſe ſert pour réduire une racine ſourde à l'expreſſion la plus ſimple. Pour y réuſſir, on diviſe la grandeur propoſée par un diviſeur qui la puiſſe diviſer exactement, c'eſt-à-dire, ſans reſte. On cherche ce diviſeur dans les nombres premiers 2, 3, 4, 5, 6 &c. de ſorte qu'il ſoit tel que le quotient de la diviſion ſoit un nombre quarré ou cubique ; enſuite on prend la racine de ce nombre quarré, s'il s'agit d'une racine quarrée, on l'écrit devant le ſigne radical, & on écrit ce diviſeur enſuite du ſigne radical.

Par exemple pour réduire la racine ſourde $\sqrt{80}$ à une expreſſion plus ſimple & équivalente $4.\sqrt{5}$, on diviſe 80 par 5, on trouve pour quotient le nombre quarré 16. Si on multiplie 16 par 5, on aura 80 ; or en multipliant 16 par 5, on multiplie auſſi la racine de 16 par la racine de 5, & le produit de ces deux racines eſt égal à la racine de 80 ; la racine de 16 eſt 4, c'eſt pour cela qu'on écrit $4\sqrt{5}$, au lieu de $\sqrt{80}$: cela eſt facile à comprendre, puiſque $4 = \sqrt{16}$, & que multiplier $\sqrt{16}$ par $\sqrt{5}$, ou 4 par $\sqrt{5}$, c'eſt la même choſe.

Pour diviſer une racine ſourde par une autre, ſi elles ſont de même nom, on écrit la grandeur dont on exprime la racine à diviſer, & au-deſſous on écrit la grandeur dont la racine exprimée eſt le diviſeur. Enfin on interpoſe le ſigne de diviſion —, & par-deſſus le tout on prépoſe le ſigne radical. Par exemple pour diviſer $\sqrt{18}$ par $\sqrt{7}$, on écrit $\sqrt{\frac{18}{7}}$; pour diviſer $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\sqrt[3]{\frac{ab}{cd}}$.

Si les racines ſourdes ne ſont pas de même nom, on exprime leur quotient en les écrivant l'une au-deſſus de l'autre avec leurs ſignes radicaux & leurs expoſans, & on interpoſe le ſigne de diviſion —. Par exemple, pour diviſer $\sqrt{ab+cf}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\frac{\sqrt{ab+cf}}{\sqrt[3]{cd}}$, & ainſi des autres exemples.

LIVRE QUATRIEME.

Des Equations.

DEFINITION XXIII.

ON appelle Equation, deux quantités différentes, entre leſquelles ſe trouvent le ſigne d'égalité; ainſi $a = b$; $ax = yy$; $bz - xx = ad$; $x = \frac{bc}{d}$, ſont des équations.

Les deux quantités qui ſe trouvent de part & d'autre du ſigne d'égalité, ſont nommées membres de l'équation; celle qui le précede eſt nommée le premier membre, & celle qui le ſuit, le ſecond. D'où l'on voit que les deux membres d'une équation, ſont les expreſſions différentes d'une même quantité, ou de deux quantités égales.

On a coûtume de ſe ſervir des premiéres lettres de l'alphabet a, b, c, &c. pour exprimer les quantités connues,

& des derniéres m, n, p, q, r, s, t, v, x, y, z pour exprimer les inconnues. Si l'on ajoûte, ou ſi l'on ſouſtrait, ou ſi l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe des quantités égales par des quantités égales, les ſommes, ou les différences, ou les produits, ou les quotiens ſeront égaux.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit qu'on peut ajoûter, ſouſtraire, multiplier, ou diviſer les deux membres d'une équation par les deux membres d'une autre, chacun par chacun, & réduire par ce moyen des équations à d'autres équations équivalentes plus faciles à réſoudre; les propoſitions ſuivantes rendront cela plus clair.

PROPOSITION PREMIERE.

Réduire par l'addition une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Si l'on a une équation entre $z - 3 + 12$, c'eſt-à-dire, ſi $z - 3 = 12$, en ajoûtant de part & d'autre du ſigne d'égalité $+ 3$, l'équation $z - 3 = 12$, ſera changée en celle-ci $z = 15$; car $- 3$ & $+ 3$ font zero, & choſes égales ajoûtées à choſes égales donnent des tous égaux.

Par la même raiſon ſi $z - b = o$; en ajoûtant de part & d'autre $+ b$, l'on aura l'équation $z = b$. Ou bien ſi $b - z = o$; en ajoûtant de part & d'autre z, l'on aura $b = z$. Si $zz - aq = o$, en ajoûtant de part & d'autre du ſigne d'égalité $+ aq$, pour lors l'équation $zz - aq = o$, ſera changée en celle-ci, $zz = aq$. Donc les quantités qui ſont précedées du ſigne $-$, ſont ajoûtés aux deux membres d'une équation, quand on les ôte de l'un de ces membres; & qu'on les met dans l'autre avec le ſigne $+$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION SECONDE.

Réduire par la ſouſtraction une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Si l'on a cette équation $z + 3 = 12$, en ôtant de part & d'autre $+ 3$, l'on aura $z = 9$; & ſi l'on avoit $zz + az = bb$, en retranchant de part & d'autre $+ az$, l'on aura $zz = az + bb$, parce que ſi de choſes égales l'on retranche (*Ax.* 11.) choſes égales, les reſtes ſeront égaux.

Par la même raiſon, l'équation $z^3 + 2c^3 = az^2 + b^2z + c^3$, peut être réduite à celle-ci, $z^3 = az^2 + b^2z - c^3$, en retranchant de part & d'autre $+ 2c^3$.

D'où il ſuit que les quantités precedées du ſigne $+$, ſont retranchées des deux membres d'une équation, quand on les ôte de l'un de ces membres, & qu'on les tranſpoſe dans l'autre avec le ſigne $-$; & par conſéquent toutes les grandeurs tranſpoſées par addition ou ſouſtraction ont devant elles un ſigne contraire à celui qu'elles avoient avant leur tranſpoſition. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION TROISIEME.

Réduire par la multiplication une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Soit l'équation $\frac{z}{3} = 5$, qu'il faut réduire par le moyen de la multiplication, à une autre équation équivalente; puiſqu'en multipliant des quantités égales par la même, les produits ſont égaux (*Lem.* 3.); ſi l'on multiplie les deux membres de l'équation par 3, l'on aura $z = 15$.

L'on peut par la même maniére changer l'équation $\frac{z\,z}{z-b} = a$, en une autre équivalente; puiſqu'en ôtant le dénominateur

minateur $z - b$, du premier membre, on multiplie ce même membre, par $z - b$, ſi l'on multiplie l'autre membre a, par $z - b$, l'on aura $zz = az - ab$.

L'on peut auſſi par la même méthode réduire une équation dont les deux membres ſont des fractions, à une équation dans laquelle il n'y aura point de fractions, en multipliant le numérateur du premier membre, par le dénominateur du ſecond, & réciproquement le numérateur du ſecond, par le dénominateur du premier, ce qui eſt la même choſe que de réduire les deux membres de l'équation à même dénomination. Mais il faut remarquer que pour abréger & rendre l'opération plus facile, on réduit quelquefois les numérateurs & les dénominateurs, avant cette multiplication, à de plus ſimples termes.

PROPOSITION QUATRIEME.

Réduire par la diviſion une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Soit l'équation $zz = 4z$: puiſqu'en diviſant des grandeurs égales par la même, les quotiens ſont égaux (*Lem.* 4.) Si l'on diviſe les deux membres de l'équation propoſée, par z, l'on aura $z = 4$. De même ſi l'on a cette équation $z^4 = az^3 + bbzz$, en diviſant les deux membres, par zz, l'on aura $zz = az + bb$. Si l'équation propoſée étoit $3z = 12$, en diviſant de la même maniére les membres, par 3, l'on auroit $z = 4$; ou bien l'équation $az = ab$ peut être changée en celle-ci, $z = b$, en diviſant par a les deux membres de l'équation $az = ab$, & ainſi de toutes les autres.

Enfin l'on peut auſſi réduire par l'extraction des racines, une équation à une autre équation équivalente, puiſque les quarrés & les cubes égaux ont des racines égales.

Les équations ſervent à démontrer par Algébre toutes ſortes de Théorêmes, dans toutes les parties des Mathématiques ; c'eſt auſſi par leur moyen qu'on peut réſoudre des Problêmes & faire des découvertes qui paroiſſent fort au-deſſus de la foible portée de l'eſprit humain.

Fin de la premiere Partie.

ELEMENS DE GEOMETRIE.

LA Géométrie eſt une partie fondamentale des Mathématiques, qui conſidere l'étenduë en particulier. L'étenduë en longueur conſiderée ſans largeur & profondeur, ſe nomme ligne. L'étenduë en longueur & largeur conſiderée ſans profondeur, ſe nomme ſurface. L'étenduë en longueur, largeur & profondeur, ſe nomme corps ou ſolide.

Ces trois ſortes d'étenduë ſont l'objet de la Géométrie.

Nous la diviſons en deux parties, dont la premiere eſt la Géométrie ſpéculative; & la ſeconde, la Géométrie pratique.

PREMIERE PARTIE.

De la Géométrie ſpéculative.

LA Géométrie ſpéculative contient cinq Livres. Dans le prémier nous traiterons des lignes ; Dans le ſecond, des ſurfaces ; Dans le troiſiéme, des propoſitions, ou des regles de comparer des grandeurs entr'elles ; Dans le quatriéme, des proportions des lignes droites & des figures qu'elles renferment ; Et dans le cinquiéme, des ſolides & des corps.

Axiomes ou véritez connuës d'elles-mêmes.

AXIOME I.

Il eſt impoſſible qu'une même choſe ſoit, & ne ſoit pas en même-tems.

AXIOME II.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

AXIOME III.

Le tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

AXIOME IV.

Si à choſes égales l'on ajoûte choſes égales, les ſommes ſeront égales.

COROLLAIRE I.

Donc, les doubles, triples, &c. des choſes égales, ſont égaux.

COROLLAIRE II.

Donc, ſi à choſes égales on ajoute choſes inégales ;

les ſommes ſeront inégales, & la plus grande ſomme ſera celle où ſe trouvera la plus grande des choſes ajoûtées.

COROLLAIRE III.

Par la même raiſon la plus grande des choſes ajoûtées ſera celle qui ſe trouvera dans la plus grande ſomme.

AXIOME V.

Si de choſes égales l'on rétranche choſes égales, les reſtes ſeront égaux; & ſi les reſtes ſont égaux, les choſes rétranchées ſeront égales.

COROLLAIRE I.

Donc, les moitiez des choſes égales ſont auſſi égales; de même que leurs tiers, &c.

COROLLAIRE II.

Il ſuit du même Axiome, que ſi de choſes égales l'on rétranche choſes inégales, les reſtes ſeront inégaux; & le plus grand reſte, celui duquel l'on aura moins retranché.

COROLLAIRE III.

Donc, la plus grande des choſes retranchées dont les reſtes ſont inégaux, eſt celle qui laiſſe un plus petit reſte.

AXIOME VI.

Les choſes qui ſont égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles, & réciproquement celles-là ſont égales entre elles qui ſont égales à une troiſiéme.

AXIOME VII.

Les grandeurs qui étant appliquées l'une ſur l'autre conviennent, ſont égales & ſemblables en tout. Récipro-

quement ces grandeurs ſont égales & ſemblables en tout, qui étant appliquées l'une ſur l'autre conviennent: or, des grandeurs conviennent quand les parties de l'une appliquées aux parties de l'autre, occupent une égale place.

AXIOME VIII.

Entre les extrêmitez de deux grandeurs, il n'y a qu'une meſure qui ſoit la plus courte, & il y en a une infinité de plus longues les unes que les autres.

Ces Axiomes ſont communs à la Géométrie ſpéculative & pratique. L'on trouvera dans la ſuite de ces élémens, les demandes & les définitions chacunes dans leur place.

PREMIER LIVRE.

Des lignes.

NOus avons à parler dans ce premier Livre de deux ſortes de lignes; ſavoir des lignes droites, & des lignes circulaires; nous le diviſerons en trois Chapitres. Dans le premier, nous parlerons des lignes droites & des angles qu'elles renferment: dans le ſecond, des lignes circulaires & de leur rencontre avec les lignes droites; & dans le troiſiéme, de la meſure des angles.

CHAPITRE PREMIER.

Des lignes droites, & des angles qu'elles renferment.

DEFINITION PREMIERE.

La ligne droite eſt la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point à un autre point; toute autre ligne eſt courbe.

COROLLAIRE PREMIER.

De-là il ſuit qu'on ne peut mener qu'une ſeule ligne

droite d'un point à un autre point ; car (*par l'Axiome* 8.) d'un point à un autre point on ne peut mener qu'une ligne qui ſoit plus courte que toutes les autres.

COROLLAIRE II.

Aucun eſpace ne peut être renfermé de tout côté par deux lignes droites ; car, ſi par exemple, les lignes *ACB* & *ADB*, qui renferment de tout côté l'eſpace *ACBD*, étoient toutes les deux droites, il y auroit deux lignes droites menées d'un point à un autre point ; ſavoir, du point *A* au point *B*, ce qui eſt impoſſible (*par le premier Corollaire.*) Donc, il eſt auſſi impoſſible que deux lignes droites renferment de tout côté un eſpace. Fig. 1. Tab. 1.

COROLLAIRE III.

Deux lignes, comme *AC* & *BC* menées des extrêmités *A* & *B* de la ligne droite *AB*, qui ſe rencontrent dans un même point au-deſſus ou au-deſſous de la ligne droite *AB* ſont toûjours plus longues priſes enſemble que la ſeule ligne droite au-deſſus, ou au-deſſous de laquelle elles ſe joignent ; car (*par la Définition préſente*) la ligne droite *AB* eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *A* au point *B* ; toutes les autres ſont plus longues : donc, les lignes *AC* & *BC* qui ſont compriſes entre les points *A* & *B*. ſont plus longues priſes enſemble que la ſeule ligne *AB*. Tab. 1. Fig. 2. & 3.

Voilà ce qui regarde la nature des lignes droites ; il faut maintenant paſſer à la diſpoſition de ces lignes entr'elles, à leur rencontre, & à leur paralléliſme : mais comme nous les devons conſiderer dans un même plan, il faut d'abord expliquer ce qu'on entend par le mot de *plan*.

DEFINITION II.

On appelle *plan* ou *ſurface plane* une ſurface que tous les points d'une ligne droite peuvent toucher ; toute autre eſt courbe.

Definition III.

L'ouverture qui se fait dans la rencontre de deux lignes inclinées l'une sur l'autre dans le même plan, est appellée *angle plan*. S'il est compris entre deux lignes droites on l'appelle, *angle rectiligne*. S'il est compris entre deux lignes courbes, on l'appelle, *curviligne*. S'il est compris entre une ligne droite & une ligne courbe, on l'appelle *mixte*.

Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Définition que la grandeur d'un angle ne se prend pas de la longueur de ses côtés ; mais seulement de l'ouverture & de l'éloignement des côtés dans le point où ils se touchent ; ainsi quoique les côtés *AB* & *BC* soient plus courts que les côtés *BD* & *BE*, il ne s'ensuit pas que l'angle *ABC* est plus petit que l'angle *DBE* ; aucontraire l'angle *ABC* est plus grand que l'angle *DBE*, parce que l'ouverture *ABC* est plus grande que l'ouverture *DBE*.

Fig. 7. Tab. 1.

Definition IV.

Lorsqu'une ligne droite tombe sur une autre ligne droite sans pancher d'aucun côté, & par conséquent (*par le Corollaire de la définition troisiéme*) forme deux angles égaux *CAB* & *CAF*, ces deux angles sont appellés *angles droits*, & la ligne *CA* qui forme ces deux angles en tombant sur la ligne *BF*, est appellée ligne *perpendiculaire* : mais si cette même ligne tomboit obliquement comme la ligne *DA*, elle formeroit deux angles inégaux *BAD* & *DAF*, dont le plus grand *BAD* est appellé *obtus*, & le petit *DAF* se nomme angle *aigu*.

Tab. 1. Fig. 8.

COROLLAIRE.

Donc, les *angles droits* sont égaux, & l'angle *obtus* est plus grand qu'un *angle droit* ; l'angle *aigu* plus petit qu'un *angle droit*.

THEOREME PREMIER.

La ligne droite *DA* tombant ſur la ligne *BE* forme deux angles *BAD* & *DAE*, qui ſont tous deux des angles droits ou égaux, pris enſemble, à deux droits.

DEMONSTRATION.

Si les angles *DAE* & *DAB* ſont égaux, ils ſont tous deux droits (*par la définition quatriéme*;) s'ils ſont inégaux, menés du point *A* la ligne *AC* & *AK* perpendiculaire à la ligne *BE*, les trois angles *DAE*, *DAC* & *CAB* ſeront égaux aux deux angles propoſés, *DAB* & *DAE*, parce que les parties priſes enſemble ſont égales au tout; par la même raiſon les deux angles droits *BAC* & *CAE* ſont auſſi égaux aux trois angles *DAE*, *DAC* & *CAB*. Donc, (*Ax. 6.*) les deux angles propoſés *DAE* & *DAB* ſont égaux aux deux angles droits *BAC* & *CAE*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 2. Fig. 1.

COROLLAIRE I.

Si un angle comme dans la figure préſente, l'angle *DAE* eſt droit, l'autre *DAB* ſera auſſi droit.

COROLLAIRE II.

Si pluſieurs lignes droites *AD*, *AC* tombent ſur la même ligne droite *BE* dans le même point *A* & dans le même plan, elles formeront les angles *EAD*, *DAC*, & *CAB* égaux à deux droits, puiſqu'ils équivalent aux deux angles *CAE* & *CAB* qui ſont deux angles droits.

COROLLAIRE III.

Comme tous les angles *BAK* & *KAE*, qui ſont dans le même plan de l'autre côté de la même ligne *BAE* ſont auſſi égaux à deux droits, il s'enſuit que tous les angles qui peuvent être autour du même point, ſont égaux, pris enſemble, à quatre angles droits.

COROLLAIRE IV.

L'on ne peut mener du même point *A* de la ligne droite *EB* deux lignes perpendiculaires du même côté ; car, ſi les lignes *AC* & *AD* étoient toutes deux perpendiculaires à la ligne *BE*, les angles *BAC* & *BAD* ſeroient deux angles droits (*Déf.* 4.) & par conſéquent égaux entr'eux, (*Déf.* 4.) & pour lors la partie ſeroit égale au tout : ce qui eſt impoſſible. (*Ax.* 2.)

THEOREME II.

Tab. 2. Fig. 2. Si les angles *BAD* & *DAF* ſont égaux à deux droits, la ligne *AD* tombera ſur une même ligne droite *BF*, & *BA* & *AF* ne feront qu'une même ligne droite.

DEMONSTRATION.

Si les deux lignes *BA* & *AH* n'étoient qu'une même ligne droite, les deux angles *BAD* & *DAH* (*Th.* 1.) ſeroient égaux à deux droits : mais les angles *BAD* & *DAF*, ſont auſſi ſuppoſés égaux à deux droits. Donc, (*Ax.* 6.) les deux angles *BAD* & *DAH* ſeroient auſſi égaux aux deux autres *BAD* & *DAF* pris enſemble : & par conſéquent en ôtant l'angle commun *BAD*, les angles *DAH* & *DAF* qui reſteroient, ſeroient auſſi égaux, & le tout ſeroit égal à ſa partie ; ce qui eſt impoſſible (*Ax.* 2.) Donc, il eſt auſſi impoſſible que *BA* & *AF* ne faſſent pas une même ligne. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Par la même raiſon deux lignes droites ne peuvent point avoir un ſegment commun ; c'eſt-à-dire, que les deux lignes *ABF* & *BAH* ne peuvent pas être toutes les deux droites, parce que pour lors l'angle *DAF* ſeroit égal à l'angle *DAH* : ce qui eſt impoſſible. (*Ax.* 2.)

COROLLAIRE II.

Deux lignes droites qui ſe touchent en plus d'un point doivent

doivent être regardées comme une même ligne droite ; car ſi les lignes *BAF* & *BAH* étoient deux lignes droites qui ſe touchaſſent en pluſieurs points, par exemple en *AB*, il y auroit deux lignes droites entre ces deux points *A* & *B*, ou bien deux lignes droites auroient un ſegment commun, ce qui eſt impoſſible (*Cor.* 1. *Déf.* 2. *& Cor.* 1. *du Theor. preſent.*) Donc, il eſt auſſi impoſſible que deux lignes droites ſe touchent en plus d'un point ſans être confonduës en une.

COROLLAIRE III.

Deux lignes droites qui ſe coupent, ne ſe touchent que dans un point mathématique lorſqu'elles ne ſont point confonduës en une.

THEOREME III.

Si deux lignes droites *BF* & *DE* ſe coupent en *A*, elles forment des angles *DAF* & *BAE* oppoſés au ſommet égaux entr'eux. Tab. 2. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Les deux angles *DAF* & *DAB* ſont égaux (*Theor.* 1.) à deux droits pris enſemble : par la même raiſon les deux angles *DAB* & *DAE* ſont auſſi égaux à deux droits. Donc, les deux premiers *DAF* & *DAB* ſont (*Ax.* 6.) égaux aux deux derniers *BAE* & *BAD* pris enſemble ; & par conſéquent en ôtant l'angle commun *DAB*, les angles *BAE* & *DAF* qui reſteront, ſeront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là, que ſi la ligne *DE* eſt perpendiculaire à la ligne *BF*, la ligne *BF* ſera auſſi perpendiculaire à la ligne *DE* : ſi la ligne *DE* eſt perpendiculaire à la ligne *BF*, les deux angles *BAD* & *DAF* ſont deux angles droits. (*Déf.* 4.) Donc, puiſque l'angle *BAD* eſt égal

à l'angle *EAF*, les deux angles *DAF* & *EAF* ſont tous deux droits, & par conſéquent (*Déf.* 4.) *BF* eſt perpendiculaire à *DE*.

THEORESME IV.

Tab. 2. Fig. 3. Si les angles oppoſés au ſommet *DAF* & *BAE*; *DAB* & *EAF* ſont égaux, ſavoir, l'angle *DAF* égal à l'angle *BAE*, & l'angle *DAB* égal à l'angle *EAF*, pour lors ces deux lignes *DAE* & *BAF* ſont deux lignes droites.

DEMONSTRATION.

Les deux angles *DAF* & *DAB* (*Ax.* 4.) ſont égaux aux deux autres *BAE* & *EAF* pris enſemble: De plus ces quatre angles (*Cor.* 3. *Theor.* 1.) ſont égaux pris enſemble à quatre angles droits. Donc, ces deux premiers *DAF* & *DAB* ſont égaux à deux droits, & par conſéquent (*Theor.* 2.) la ligne *BAF* eſt droite; par la même raiſon les deux angles *BAE* & *BAD* pris enſemble ſont égaux aux deux angles *DAF* & *EAF*, & par conſéquent les mêmes angles *BAE* & *BAD* pris enſemble (*Ax.* 6.) ſont auſſi égaux à deux droits, & la ligne *DAE* (*Theor.* 2.) eſt une ligne droite. Donc, ces deux lignes *BAF* & *DAE* ſont toutes deux droites. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà ce qui regarde les lignes droites en général, voyons maintenant ce qui regarde la rencontre des lignes perpendiculaires.

THEOREME V.

Tab. 2. Fig. 4. La ligne indéfinie perpendiculaire *KC* dans le milieu *B* de la ligne *MN* a tous ſes points également éloignés des extrêmitez *M* & *N* de la ligne *MN*.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que le plan *MKNC* eſt plié de façon que le plis ſoit dans la ligne droite *KBC*. Premierement, il

eſt clair que *BM* tombera ſur *BN* ; car, ſi elle tomboit deſſus ou deſſous en *BE* , l'angle *KBM* qui ſeroit pour lors égal à l'angle *KBE* , ſeroit plus grand ou plus petit que l'angle *KBN* , ce qui eſt contre l'hipothéſe. Secondement, le point *M* tomberoit ſur le point *N*, parce que l'on a ſuppoſé que les lignes *BM* & *BN* étoient égales. Donc, pour lors le point *H* & tous les autres points de la ligne perpendiculaire indéfinie *KC* ſont également éloignés des extrêmités *M* & *N* de la ligne *MN* : Ce qu'il falloit démontrer.

On peut auſſi démontrer la même choſe en diſant, que ſi quelque point de la ligne perpendiculaire *KC*, comme le point *H* étoit plus près des l'un des deux points *M* & *N* , la ligne *KC* ne ſeroit point perpendiculaire au milieu de la ligne droite *MN* , ou elle ſeroit plus inclinée du côté de l'un de ces deux points *M* & *N* que de l'autre, ce qui eſt contraire à l'hypothéſe. Donc, tous les points de la ligne perpendiculaire *KC* ſont également diſtans des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN* dans le milieu de laquelle elle tombe perpendiculairement.

THEOREME VI.

La ligne perpendiculaire indéfinie *KC* dans le milieu *B* de la ligne droite *MN*, paſſe par tous les points qui ſont dans le plan de ces lignes droites également diſtans des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*. Tab. 2. Fig. 5.

DEMONSTRATION.

Qu'on prenne dans le plan des lignes droites *KC* & *MN* tel point qu'on voudra, comme le point *G* hors de la ligne *KC* , qu'on méne de ce point les deux lignes *GM* & *GN*, dont l'une, ſavoir, *GN* paſſe par quelque point, par exemple par le point *H* de la ligne droite *CBK* ; enſuite qu'on joigne *MH* & *NH*.

Puiſque par l'hypothéſe la ligne droite indéfinie *KC* eſt perpendiculaire à la ligne *MN*, & qu'elle tombe ſur

le point *B* également éloigné de *M* & de *N* qui sont les deux extrêmités de la ligne droite *MN*, les lignes *MH* & *NH* (*Th.* 5.) sont aussi égales. Donc, en ajoûtant des deux côtés *GH*, *HM* & *HG* seront (*Ax* 4.) égales prises ensemble à la ligne *GN*; mais (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) *HM* & *HG* sont plus grandes que *GM*. Donc, *GN* sera aussi plus grande que *GM*, & par conséquent le point *G* sera inégalement distant des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*.

Ce qui vient d'être démontré du point *G* peut pareillement se démontrer de tout autre point hors de la ligne indéfinie *KC*, pourvu que ce point soit dans le plan de la ligne *KC* & de la ligne *MN*. Donc, il n'y a aucun point dans ce plan hors de la ligne indéfinie *KBC* qui soit également distant des points *M* & *N*: Donc, (*Theor.* 5.) cette ligne perpendiculaire indéfinie *KC* passe par tous les points également éloignez des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN* : Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Deux points *K* & *H* étant donnés également distans des deux extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN* & dans le même plan, si de tel point qu'on voudra, par exemple, du point *G* on méne une ligne qui coupe la ligne *MN* par la moitié, & que l'on méne par les points donnés *K* & *H* une ligne perpendiculaire à la ligne *MN*, il n'y aura que la ligne *KHB* qui soit perpendiculaire à la ligne *MN* de toutes ces qui la diviseront en deux parties égales; car il n'y en aura aucune comme la ligne *GB* qui puisse avoir le point *G* ou un autre, excepté le point *B*, également distant des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*; car cela ne convient qu'à la seule ligne droite *CBK*; d'où il suit (*Theor.* 5.) qu'il n'y a que cette ligne droite dans le même plan, & menée du même point *B* de la ligne droite *MN*, qui soit perpendiculaire à cette ligne

MN, ce qui avoit déja été conclu par le Corollaire quatriéme du Théorême premier.

THEOREME VII.

Premierement, la plus courte des lignes *CD*, *CF*, *CG*, *CA*, *CB*, qu'on peut mener du point *C* sur la ligne droite *AB*, est la perpendiculaire *CD*. Tab. 2. Fig. 6.

Secondement, la plus courte de toutes les autres ; *CF*, *CA*, &c. est celle qui est la plus proche de la perpendiculaire *CD*.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Prolongez la ligne *CD* vers *E* jusqu'à ce que *DE* soit égale à *CD*. Joignez ensuite *EF* & *EA*, &c. puisque par l'hypothése *CE* est perpendiculaire à *AB* ; *AB* sera aussi (*Cor. Theor.* 3.) perpendiculaire à *CE*. Donc par l'hypothése *CD* étant égale à *DE*, *CF* sera aussi (*Theor.* 5.) égale à *EF* ; & (*Ax.* 3.) *CF* & *EF* prises ensemble seront égales au double de *CF*, comme *CE* est égale au double de *CD*. Mais (*Cor.* 3. *Def.* 1.) *CF* & *EF*. prises ensemble sont plus grandes que *CD* & *ED* tout ensemble, donc le double de *CF* est plus grand que le double de *CD*, & par conséquent (*Cor.* 1, *Ax.* 5.) *CF* est pus grande que *CD*.

Par la même raison on peut prouver que *CA* & les autres lignes obliques menées du point *C* sur la ligne *AB* sont toutes plus grandes que la seule perpendiculaire *CD*. Donc la ligne perpendiculaire *CD* est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *C* sur la ligne droite *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Prolongez la ligne *CF* jusques au point *O* de ligne droite *AE*. Les lignes *FO* & *OE* prises ensemble (*Cor.* 3. *Def.* 1.)

ſont plus grandes que la ligne *FE*. Donc en ajoûtant des deux côtés *FC*. *CO*. & *OE* (*Cor.* 2. *Ax.* 4.) priſes enſemble ſeront plus grandes que *FC* & *FE*; mais *AC* & *AO* ſont enſemble (*Cor.* 3. *Def.* 1.) plus grandes que *CO*. Donc ſi vous ajoûtés des deux côtés *OE*, vous aurés (*Cor.* 2. *Ax.* 4.) *AC* & *AE* plus grandes enſemble que *CO* & *OE*. Donc à plus forte raiſon *AC* & *AE* ſeront enſemble plus grandes que *FC* & *FE*, mais par l'hypothéſe *CD* eſt égale à *DE*, & (*Cor. Theor.* 3.) *AB* eſt perpendiculaire à *CE*. Donc *AC* (*Theor.* 5.) eſt égale à *AE*, & *FC* à *FE*, & le double de *AC* égal aux deux lignes *AC* & *AE* priſes enſemble, & le double de *FC* eſt auſſi égal aux deux lignes *FC* & *FE* priſes enſemble. Donc enfin le double de la ligne *AC* eſt plus grand que le double de la ligne *FC*, & par conſéquent *AC* eſt auſſi plus grand que *FC*.

On peut de même démontrer que toute autre ligne oblique menée du point *C* ſur la ligne droite *AB* & plus éloignée de la perpendiculaire que la ligne *AC*, eſt plus grande que cette même ligne *AC*. Donc les plus proches de la perpendiculaire *CD* ſont plus courtes que celles qui en ſont plus éloignées. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De ce qui vient d'être démontré, il ſuit qu'on ne peut mener du point *C* qu'une ligne perpendiculaire ſur la ligne droite *AB*, car ſi on pouvoit mener une autre ligne perpendiculaire, par exemple *CF*; en ſuppoſant que la ligne *AD* eſt égale à *DB* & *FG* égale à *AF*; les lignes *CB*, *CA*, *CG*, (*Theor.* 5.) ſeroient égales entre elles, ce qui eſt impoſſible par la ſeconde partie du Théorême preſent.

COROLLAIRE II.

On ne peut mener d'un même point qu'une ſeule ligne perpendiculaire à la même ligne droite, dans un plan qui paſſe par cette ligne droite, cela ſuit neceſſairement de ce qui vient d'être démontré, auſſi bien que du Corollaire quatriéme du Théorême premier.

COROLLAIRE III.

Deux lignes pérpendiculaires à la même troiſiéme ligne droite ne peuvent ſe rencontrer, fuſſent-elles prolongées à l'infini; car ſi elles ſe rencontroient il y auroit deux lignes perpendiculaires menées du point où elles ſe rencontreroient ſur lamême ligne droite; ce qui eſt impoſſible par le Corollaire ſecond.

COROLLAIRE IV.

La perpendiculaire qui paſſe pour un point également diſtant des extrémités de la ligne droite à laquelle elle eſt perpendiculaire, paſſe auſſi par le point qui eſt au milieu de cette même ligne droite. Car puiſque la ligne qui paſſe par ces deux points eſt perpendiculaire (*Cor.* 1. *Theor.* 6.) à cette même ligne droite, ſi celle qui paſſe par un point également diſtant des extrémités de la ligne droite à laquelle elle eſt perpendiculaire, ne paſſoit pas auſſi par le point qui eſt au milieu de cette même ligne droite, on pourroit mener du même point deux lignes perpendiculaires ſur cette ligne droite; ce qui eſt impoſſible par le Corollaire ſecond.

COROLLAIRE V.

De la ſeconde démonſtration il ſuit qu'on ne peut mener du même point ſur une ligne droite que deux lignes égales; ſavoir, celles qui ſont des deux côtés également éloignées de la perpendiculaire menée du même point ſur cette même ligne droite. Car ſi on en pouvoit mener trois, il y en auroit deux égales du même côté de la perpendiculaire, quoiqu'inégalement éloignées d'elle; ce qui eſt impoſſible par la ſeconde démonſtration du preſent Théorême.

COROLLAIRE VI.

Non ſeulement la ligne perpendiculaire *CD* eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *C* à la ligne droite *AB*; mais encore la plus courte eſt la per-

pendiculaire *CD*, ſans quoi la perpendiculaire ne ſeroit pas la plus courte de toutes; ce qui eſt impoſſible par la premiere partie de ce Théorême.

COROLLAIRE VII.

Non ſeulement les lignes obliques les plus éloignées de la perpendiculaire ſont les plus longues, mais encore les plus longues ſont les plus éloignées. Car ſi la ligne *AC*, par exemple, étoit plus proche de la perpendiculaire *CD* que la ligne *CF*, elle ſeroit auſſi plus courte, par la démonſtration de la ſeconde partie du preſent Théorême; ou bien ſi les lignes *AC* & *CF* étoient également éloignées de la ligne perpendiculaire *CD*, elles ſeroient (*Theor.* 5.) égales. Ce qui eſt contre l'hypothéſe faite.

COROLLAIRE VIII.

Par la même raiſon que les lignes *AC* & *AE* (*Démonſtr.* 2.) ſont plus grandes que les lignes *FC* & *FE* priſes enſemble, on peut démontrer en général que ſi des extrémités de la même ligne droite *CE* on méne pluſieurs lignes, *CF*, *FE*; *CA*, *AE* qui concourent les unes *CFE* entre les autres *CAE*, la ſomme des lignes enfermées *CF* & *FE* eſt plus petite que la ſomme de celles qui les enferme *AC* & *AE*.

SCOLIE.

De tout ce qui a été démontré juſques ici des lignes perpendiculaires, des lignes obliques, & de leur diſtance de la ligne perpendiculaire, il ſuit en général.

Que ſi les lignes perpendiculaires ſont égales, les lignes obliques ſeront égales ou inégales ſelon l'égalité, ou l'inégalité de leur diſtance des lignes perpendiculaires; & réciproquement dans la même hypothéſe, les lignes obliques ſeront également ou inégalement éloignées des lignes perpendiculaires ſelon qu'elles ſeront égales ou inégales.

Après avoir démontré ce qui regarde la rencontre des lignes

lignes droites, il faut examiner ce qui concerne leur parallélisme.

DEFINITION V.

Deux lignes droites *AC* & *BD* dans le même plan, également inclinées sur la ligne *EH*, & qui forment deux angles, l'externe *EFC*, & l'interne *EGD* du même côté, égaux entr'eux, sont appellées *paralléles*. Tab. 3. Fig. 1.

COROLLAIRE.

Les lignes *AC* & *MN* paralléles à la même troisiéme *BD* & dans le même plan, sont aussi paralléles entr'elles. Car en menant une ligne, par exemple *EH*, qui les coupe toutes; les angles *EFC*, *EKN* seront égaux (*par la Déf. préc.*) à l'angle *FGD*, & par conséquent égaux entr'eux. Donc (*par la Définition présente*) les lignes *AC* & *MN* sont paralléles entr'elles. Tab. 3. Fig. 2.

AVERTISSEMENT.

Pour rendre les démonstrations suivantes plus courtes & plus claires, nous nous servirons des cinq signes dont nous avons parlé dans le Traité précedent, & du signe ×, qui marque la multiplication, par exemple, 2 × 4 signifie deux multipliés par quatre.

THEOREME VIII.

Si les lignes *AC* & *BD* sont paralléles; premiérement, les angles alternes internes *AFG* & *FGD* sont égaux. Tab. 3. Fig. 1.

Secondement, les angles alternes externes *EFC* & *BGH* sont aussi égaux.

Troisiémement, les angles internes du même côté *CFG*, *FGD* sont ensemble égaux à deux droits.

Quatriémement, les angles externes du même côté *EFC* & *DGH* sont aussi égaux à deux droits.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *EFC* (*Déf. 5.*) est = à l'angle *FGD*, & le même

angle *EFC* eſt égal (*Theor.* 3.) à l'angle *AFG* qui lui eſt oppoſé au ſommet. Donc (*Ax.* 6.) l'angle *AFG* eſt = à l'angle *FGD*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

De même, puiſque (*Déf.* 5.) l'angle *EFC* eſt = à l'angle *FGD*, & l'angle *FGD* (*Theor.* 3.) = à *BGH*; l'angle *EFC* (*Ax.* 6.) eſt = à l'angle *BGH*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Puiſque (*Déf.* 5.) l'angle *EFC* eſt = à l'Angle *FGD*, & (*Theor.* 1.) les angles *FGD*, + *DGH* ſont = à deux droits. Donc *EFC* + *DGH* ſont = à deux droits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Si la ſécante *EFGH* eſt perpendiculaire à l'une des paralléles, elle ſera auſſi perpendiculaire à l'autre; ſi elle eſt perpendiculaire à la ligne *AC*, elle ſera auſſi perpendiculaire à la ligne *BD*; car pour lors (*Cor. Th.* 3.) la ligne *AC* ſera auſſi perpendiculaire à la ligne *EH*, & (*Déf.* 4.) l'angle *AFG* ſera un angle droit. Donc puiſque (*partie* 1.) l'angle *AFG* eſt = à l'angle *FGD*, & que (*Theor.* 1.) les angles *FGB* & *FGD* ſont égaux à deux droits, les angles *FGB* & *FGD* ſeront deux angles droits, & par conſéquent *EH* ſera auſſi perpendiculaire à *BD*. (*Déf.* 4.)

DEMONSTRATION DE LA QUATRIEME PARTIE.

Puiſque (*Déf.* 5.) l'angle *EFC* eſt = à l'angle *FGD*, & que (*Theor.* 1.) les angles *FGD* + *DGH* ſont = à deux droits, les angles *EFC* + *DGH* (*Ax.* 4.) ſeront auſſi égaux à deux droits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

Les lignes par alléles, par exemple *AC*, *BD*, prolongées à l'infini, ne peuvent jamais ſe rencontrer. Car ſi l'on ſuppoſe que la ligne *EH* eſt perpendiculaire à la ligne *AC*,

elle ſera auſſi (*Cor.* 1.) perpendiculaire à la ligne *BD*, & par conſéquent ſi ces deux lignes paralléles pouvoient ſe rencontrer, il y auroit deux lignes perpendiculaires menées du même point ſur une même ligne droite; ce qui eſt (*cor.* 2. *theor.* 7.) impoſſible. Donc il eſt auſſi impoſſible que des lignes paralléles ſe rencontrent.

THEOREME IX.

Les lignes AC & BD ſont paralleles.

Premierement, ſi les angles alternes internes, *AFG*, *FGD* ſont égaux. Tab. 3. Fig. 1. 2.

Secondement, ſi les angles alternes externes, *EFC*, *BGH* ſont auſſi égaux.

Troiſiémement, ſi les angles internes du même côté, *CFG* *FGD* ſont égaux enſemble à deux droits.

Quatriémement ſi les angles externes du même côté *EFC*, *HGD* ſont auſſi enſemble égaux à deux droits.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *F G D* (*l'Hyp.*) eſt = à l'angle *AFG*, & l'angle *AFG* (*Théorême* 3.) eſt = à l'angle *EFC*; & ainſi (*Ax.* 6.) l'angle *FGD* eſt égal à l'angle *EFC*, & par conſéquent les lignes *A C* & *BD* (*Def.* 5.) ſont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *EFC* (*Hypp.*) eſt = à l'angle *BGH*, & (*Th.* 3.) *BGH* = *FGD*. Donc *EFC* (*Ax.* 6.) eſt = à *FGD*. & par conſéquent (*Déf.* 5.) ces lignes *AC* & *BD* ſont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Les angles *FGD* + *CFG* ſont égaux à deux droits (*Hyp.*) & les angles *EFC* & *CFG* ſont auſſi (*Theor.* 5.) = à deux droits. Donc l'angle *EFC* (*Ax.* 5.) eſt = à l'angle *FGD*, & par conſéquent (*Déf.* 5.) les lignes droites *AC* & *BD* ſont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA QUATRIEME PARTIE.

Les angles $EFC + HGD$ (*Hyp.*) ſont = à deux droits. $FGD + HGD$ (*Theor.* 1.) ſont auſſi égaux à deux droits. Donc l'angle EFC (*Ax.* 5.) eſt = à l'angle FGD ; & par conſéquent (*Déf.* 5.) les lignes droites AC & BD ſont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Si la même ligne EH eſt perpendiculaire aux deux lignes droites AC & BD, tous les angles de cette figure (*Def.* 4. & *Th.* 3.) ſont des angles droits, & par conſéquent, par toutes les parties du préſent théorême, les lignes AC & BD ſont des lignes paralléles.

CHAPITRE SECOND.

Des lignes circulaires, & de leur rencontre avec les lignes droites.

DEFINITION VI.

Tab. 3. Fig. 3.

LA regle AB tournant autour du point fixe A, qui eſt une des extrêmitez de la regle, l'autre extrêmité B décrira une ligne courbe $CBDE$. La ligne qu'elle aura décrite lorſqu'elle ſera parvenuë dans l'endroit d'où elle étoit partie s'appelle *circonférence du cercle*, & l'eſpace compris entre cette ligne courbe, ſe nomme, *cercle*.

Une partie de la circonférence, comme par exemple CB eſt appellée *arc de cercle* : le point A autour duquel la régle a tourné, eſt appellé *le centre* du cercle. Toutes les lignes droites menées du centre à la circonférence ſe nomment *rayons*.

Les lignes droites menées d'un point de la circonférence à un autre point ſont appellées *cordes des arcs* par les extremités deſquels elles paſſent : mais lorſque ces lignes paſſent par le centre, on les nomme diamétres.

La partie du cercle compriſe entre la corde & l'arc

eſt appellée *ſegment* du cercle.

Le ſecteur du cercle eſt la partie du cercle contenuë entre deux rayons & l'arc compris entre ces rayons.

La ligne droite dans le plan du cercle qui touche ſa circonférence, de maniére qu'étant prolongée elle n'entre point dans le cercle, eſt appellée *tangente* du cercle.

COROLLAIRE I.

Il paroît par la formation du cercle, que la meſure du mouvement de la regle *AB* & de ſon éloignement de la ligne droite *AC*, eſt l'arc *BC* qu'elle a décrit par ce même mouvement.

COROLLAIRE II.

Il paroît auſſi par la maniére dont ce cercle eſt décrit par la regle *AB* que tous les rayons ſont égaux à la regle *AB*, & par conſéquent (*Ax.* 6.) égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Les diamétres ſont auſſi (*Cor.* 1. *Ax.* 4.) égaux entr'eux ; car chaque diametre (*Définition préſente*) eſt compoſé de deux rayons.

COROLLAIRE IV.

Les lignes menées du centre, qui ſont plus courtes que ces rayons ne vont pas juſques à la circonférence; celles qui ſont plus longues s'étendent au-delà de la circonférence.

COROLLAIRE V.

L'on peut dire que les cercles, ou les circonférences des cercles, qui ont le même rayon, ſont égales ; celles qui ont un plus grand rayon ſont plus grandes, celles qui ont un plus petit rayon ſont plus petites.

COROLLAIRE VI.

Deux cercles qui ont le même centre ne peuvent jamais ſe rencontrer ; car s'ils ſe pouvoient rencontrer, la

ligne droite menée du point où ils se rencontreroient, au centre commun, seroit un rayon commun aux deux cercles, & par conséquent tous les rayons des deux cercles (*Cor.* 2.) seroient égaux entr'eux ; ainsi il n'y auroit qu'un cercle.

COROLLAIRE VII.

Donc, les cercles qui se rencontrent ne peuvent pas avoir le même centre.

COROLLAIRE VIII.

Tab. 3. Fig. 4. De l'égalité des rayons, il suit qu'on peut décrire un cercle par trois points donnés qui ne seront point disposés en ligne droite, comme *CBD* ; que le centre de ce cercle sera le point *A* où se rencontrent les lignes *AE* & *AF* qui coupent perpendiculairement par la moitié les cordes *BD* & *BC* ; car le point *A* (*Theor.* 5.) est également distant des points donnés *DBC*, & par conséquent (*Cor.* 4.) le cercle décrit du centre *A* par l'un de ces points passera aussi par les deux autres.

J'ai dit que les trois points donnés *DBC* ne devoient point être disposés en ligne droite, ou bien que les lignes *DB* & *BC* ne devoient pas faire une même ligne droite, parce que (*Cor.* 3. *Theor.* 7.) aucun point ne peut être également distant de trois points d'une ligne droite : par conséquent il n'y en a aucun duquel on puisse décrire un cercle qui passe par trois autres points d'une même ligne droite.

THEOREME X.

Tab. 3. Fig. 5. 6. 7. Premiérement, la plus longue des lignes droites *AB*, *AD*, *AE*, &c. qu'on peut mener du même point *A* hors du centre du cercle *C*, à la circonférence *BEF*, est celle qui passe par le centre.

Secondement, la plus longue des autres *AD*, *AE*, &c. est celle qui se termine à un point de la circonférence *D* plus proche du point *B*, où se termine la plus longue *AB*.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Menés du centre *C* les rayons *CD*, *CE*, pour lors (*Cor.* 2. *Défin.* 6.) $CB = CD$, ainſi (*Ax.* 4.) $AC + CD = AB$: mais (*Corollaire* 3. *Définition premiere*) $AC + CD \geq AD$. Donc, *AB* eſt auſſi $\geq AD$. Par la même raiſon $AB \geq AE$, & ainſi des autres lignes qu'on peut mener du point *A* à la circonférence ſans qu'elles paſſent par le centre *C*. Donc, la plus longue de toutes eſt *AB* qui paſſe par le centre *C*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

$DO + OC$ (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) $\geq DC$; mais *DC* (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) $= EC$. Donc, (*Cor.* 4. *Ax.* 5.) *DO* eſt $\geq EO$. Ainſi (*Cor.* 2. *Ax.* 4.) *AD* eſt plus grand $EO + OA$ (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) $\geq EA$. Il en eſt de même de toutes les autres lignes droites qu'on peut mener du point *A* à pluſieurs points plus proches les uns que les autres du point *B*. Donc, la plus longue eſt celle qui eſt plus proche du point *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de cette ſeconde démonſtration, que la partie *AF* de la ligne *AB* continuée juſques au point *F* de la circonférence, oppoſé au point *B* eſt la plus courte de celles qu'on peut mener du point *A* à la circonférence *BDEF*. puiſqu'elle ſe termine au point *F* qui eſt le plus éloigné de tous du point *B*.

COROLLAIRE II.

On ne peut mener du même point *A* à la circonférence *BDEF* que deux lignes droites égales terminées aux deux points également éloignés du point *B* de la plus longue de toutes *AB*. Car ſi de toutes les lignes qu'on peut mener du point *A* à la circonférence *BDEF*, il pouvoit y en avoir trois d'égales, il y en auroit au moins deux égales du même côté quoique terminées à des points inégalement diſtans du point *B* de la plus longue

de toutes *AB*. Ce qui eſt impoſſible par la partie ſeconde du préſent Théorême. Donc, il eſt auſſi impoſſible que du même point pris hors du centre du cercle on méne plus de deux lignes droites à la circonférence, qui ſoient égales.

COROLLAIRE III.

Les lignes égales menées du même point hors du centre, à la circonférence, ſe terminent à des points également diſtans du point *B* de la plus longue de toutes *AB*; car ſi ces points étoient inégalement diſtans, ces lignes ſeroient auſſi (*Part.* 2.) inégales : ce qui eſt contre l'hypothéſe. Donc, les points de la circonférence auſquels ces lignes ſe terminent ſont également diſtans du point *B* auquel ſe termine la plus longue de toutes *AB*.

COROLLAIRE IV.

Tab. 3. Fig. 6. Le plus grand des arcs inégaux *AE*, *AD* du demi-cercle *AEDB*, a auſſi la plus grande corde ; car l'arc *AD* eſt plus grand que l'arc *AE* & le point *D* eſt plus proche du point *B* que le point *E*, & par conſéquent, (*Part.* 2.) la corde *AD* eſt plus grande que la corde *AE*. D'où l'on peut conclure en général, que les plus grands arcs dans le même demi-cercle ont toûjours de plus grandes cordes que les plus petits.

COROLLAIRE V.

Si la corde *AD* eſt plus grande que la corde *AE*, le point *D* ſera plus proche (*Partie* 2.) du point *B* que le point *E*, & par conſéquent l'arc *AED* ſera plus grand que l'arc *AE*. D'où on peut conclure en général que les grandes cordes ont toûjours les plus grands arcs.

COROLLAIRE VI.

Des deux derniers Corollaires, il ſuit que les cordes égales ont toûjours des arcs égaux, & réciproquement

que

que les arcs égaux ont toujours des cordes égales.

COROLLAIRE VII.

Ce qui vient d'être démontré du même demi-cercle peut s'entendre du cercle entier ; ainſi on peut dire en général que dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grands arcs ont les plus grandes cordes, & réciproquement les plus grandes cordes ont les plus grands arcs.

THEOREME XI.

La corde, ou la ligne droite *EF* qui joint les points *EF* de la circonférence *EGF* eſt toute dans le cercle. Tab. 3. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que du centre *A* ſont menés les rayons *AE*, *AF* & la ligne *AB* perpendiculaire à la ligne droite *EF*. *AE* (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) eſt = à *AF*. La perpendiculaire *AB* ſera donc (*Theor.* 7.) plus courte que ces rayons; & par conſéquent le point *B* de la ligne droite *EF* (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) ſera dans le cercle ; & les autres points de la ligne *EF* étans plus proches du point *B* que les points *E* & *F*, ils ſont auſſi (*Theor.* 7.) moins éloignés du centre *A* que les points *E* & *F*. Donc, (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) tous les points de la ligne *EF* ſont dans le cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Une ligne droite ne peut donc rencontrer la circonférence d'un cercle que dans deux points.

COROLLAIRE II.

Si une ligne droite touche un cercle, elle ne le touche que dans un point, car ſi elle le touchoit dans deux points, elle le couperoit, *comme il paroît par le Théorême preſent.*

COROLLAIRE III.

Donc, la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener du centre à la tangente d'un cercle, eſt celle qui eſt menée au point où la tangente touche le cercle.

COROLLAIRE IV.

Le rayon qui eſt mené du centre au point où la tangente touche le cercle (*Cor. 6. Th. 7.*) eſt perpendiculaire à la tangente.

COROLLAIRE V.

La tangente eſt auſſi (*Cor. Th. 3.*) perpendiculaire à l'extrémité du diametre ou du rayon qui paſſe par le point où elle touche le cercle.

COROLLAIRE VI.

La ligne droite qui dans le plan d'un cercle eſt perpendiculaire à l'extremité d'un diametre ou d'un rayon, touche le cercle dans ce même point; autrement, puiſque la ligne qui touche le cercle dans ce point eſt auſſi (*Cor. 5.*) perpendiculaire au même diametre ou rayon, & (*Déf. 6.*) dans le même plan, il y auroit deux lignes perpendiculaires à cette même ligne, menées du même point. Ce qui eſt (*Cor. 2. Th. 7.*) impoſſible.

COROLLAIRE VII.

La ligne perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle, & dans le plan du cercle, paſſe par le centre, autrement il pourroit ſe faire qu'il y eût deux lignes perpendiculaires menées du même point & dans le même plan à la tangente du cercle, puiſque la ligne menée du centre au point où elle touche le cercle lui eſt auſſi (*Cor. 4.*) perpendiculaire: mais il eſt impoſſible (*Cor. 2. Th. 7.*) qu'il y ait deux lignes perpendiculaires à la même ligne, menées du même point. Donc, il eſt

auſſi impoſſible que la ligne perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle ne paſſe pas par le centre.

COROLLAIRE. VIII.

Deux des trois choſes ſuivantes étant données. Premiérement, que la tangente du cercle eſt une ligne droite. Secondement, qu'une autre ligne droite eſt perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle, & dans le plan du cercle. Troiſiémement, que cette même ligne droite paſſe par le centre du cercle : La troiſiéme ſuit neceſſairement par quelqu'un des Corollaires précédens, 4, 5, 6, 7.

COROLLAIRE IX.

Il ſuit du Corollaire cinquiéme, qu'on ne peut mener qu'une ſeule tangente par le même point de la circonférence d'un cercle; car le diamétre ou le rayon qui paſſe par ce point ne peut avoir (*Cor.* 2. *Th.* 7.) qu'une ſeule perpendiculaire dans ce même point & dans le même plan.

COROLLAIRE X.

Donc, la ligne droite différente de la tangente & qui paſſera par le point où elle touche le cercle, le coupera; autrement il y auroit deux tangentes dans le même point, ce qui eſt impoſſible par le Corollaire neuviéme.

THEOREME XII.

De ces trois choſes 1°. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite dans le même plan du cercle; 2°. Qu'elle eſt coupée perpendiculairement; 3°. Que la ſécante paſſe par le centre du cercle : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement. Tab. 3. Fig. 8.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Suppoſons que la ligne droite *GB* coupe par la moitié

& perpendiculairement la corde *EF* ; je dis que la ligne *GB* paſſe par le centre ; car (*Th. 6.*) la ligne *GB* paſſe par tous les points également diſtans des points *E* & *F*. Donc, (*Cor. 2. Déf. 6.*) elle paſſe auſſi par le centre du cercle : ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si la ligne *GB* paſſe par le centre du cercle, & coupe par la moitié la corde *EF*, je dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à la ligne *EF* ; car puiſque le point *A* (*Cor. 2. Déf. 6.*) eſt également diſtant des points *E* & *F*, la ligne droite *GB* aura dans ce cas deux points *A* & *B* également diſtans des extrêmités *E* & *F* de la même ligne *EF*. Donc, (*Cor. 1. Th. 6.*) la ligne *GB* ſera perpendiculaire à la ligne *EF* : ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU TROISIE'ME CAS.

Si la ligne *GB* paſſe par le centre du cercle *A*, & ſi elle eſt en même tems perpendiculaire à la corde *EF* ; je dis, que la ligne *GB* coupe la corde *EF* par la moitié en *B* ; car puiſque (*Cor 2. Déf. 6.*) le point *A* eſt également diſtant des extremités *E* & *F* de la corde *EF* ; la corde *EF* (*Cor. 4. Th. 7.*) eſt coupée par la moitié par la ligne *GB* qui eſt ſuppoſée perpendiculaire : ce qu'il falloit démontrer

COROLLAIRE I.

Tab. 4. Fig. 1. Il ſuit de la premiere démonſtration, que ſi d'un point de la circonférence du cercle *DBC* : Par exemple, du point *B*, on méne deux lignes droites, ou deux cordes à deux autres points comme *D* & *C*, qui ſoient coupées perpendiculairement par la moitié par deux autres lignes droites *EA* & *FA*, ces deux lignes ſe rencontreront dans le centre du cercle *A* ; car puiſque par la Démonſtration premiere, le centre du cercle eſt dans l'une & l'autre de ces deux lignes ; il faut néceſſairement que le centre ſoit le point qui eſt commun à toutes les deux.

COROLLAIRE II.

Si deux circonférences de cercle ont trois points communs, elles auront auſſi le meme centre, & par conſéquent (*Cor.* 5. *Déf.* 6.) elles ſeront confonduës en une.

COROLLAIRE III.

Deux circonférences de cercle ne peuvent donc ſe rencontrer en plus de deux points ; car ſi elles ſe rencontroient en plus de deux points, elles auroient au moins trois points communs, & par conſéquent (*Cor.* 2.) elles ſeroient confonduës en une.

COROLLAIRE IV.

Tab. 4. Fig. 1.

Il ſuit de la ſeconde Démonſtration, que les deux cordes *EF* & *HG* qui ſe rencontrent dans le point *B* hors du centre *A* du cercle *EGFH* ne ſe coupent point par la moitié ; car ſi le point *B* étoit le milieu des deux lignes *EF* & *GH*, en menant la ligne *AB* du centre *A*, cette ligne *AB* (*Démonſtr.* 2.) ſeroit perpendiculaire aux deux lignes *EF* & *GH*, & ainſi il y auroit (*Cor. Th.* 3) deux lignes *EB* & *GB* menées du meme point *B* perpendiculaires dans le meme plan à la ligne *AB* ; ce qui eſt impoſſible. (*Cor.* 2. *Th.* 7.) Donc, il eſt auſſi impoſſible que les deux cordes *EF* & *GH* ſe coupent par la moitié dans le point commun *B*.

THEOREME XIII.

Tab. 4. Fig. 3.

De ces trois choſes, premiérement, que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite menée dans le même plan du cercle. Secondement, que l'arc tendu par cette corde eſt auſſi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde. Troiſiémement, que cette ligne droite paſſe par le centre : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Si la ligne droite *ABC* coupe par le milieu la corde *EF* en *B*, & l'arc *ECF* en *C*, je dis que la ligne *ABC* paſſera par le centre. Car (*Cor. 6. Théorême* 10.) les lignes droites *EC* & *FC* ſont égales entre elles, & par l'hypothéſe *EB* & *BF* ſont auſſi égales. Donc (*Cor. Théor. 6.*) *BC* eſt perpendiculaire à *EF*, & coupant par l'hypothéſe la corde *EF* par le milieu, elle paſſera (*Th. 6. & Cor. 2. Déf. 6.*) par le centre *A* du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si la ligne *ABC* paſſe par le centre, & coupe la corde *EF* par le milieu; je dis que les arcs *CE* & *CF* ſont égaux & que la ligne *ABC* coupe l'arc *ECF* par le milieu; car (*Cor.* 1. *Th. 6.*) *AB* eſt perpendiculaire dans le milieu de la ligne *EF*; & par conſéquent les lignes droites *EC* & *FC* (*Th.* 5) ſont égales. Donc les arcs, *CE* & *CF* ſont auſſi (*Cor. 6. Th.* 10.) égaux entre eux, & la ligne *ABC* coupe par le milieu l'arc *ECF*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU TROISIE'ME CAS.

Si la ligne *ABC* paſſe par le centre du cercle, & coupe par le milieu l'arc *ECF*; je dis que la ligne *AC* eſt perpendiculaire dans le milieu de la corde *EF*. Car dans ce cas (*Cor. 2. Déf. 6.*) *AF* & *AE* ſont égales, & (*Cor. 6. Th.* 10.) *EC* & *CF* ſont auſſi égales. Donc (*Cor. Th. 6*) *AC* eſt perpendiculaire à la corde *EF* & dans le milieu qui eſt le point *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De ce Théorême & du précedent, il ſuit que de ces quatre choſes. Premierement, que la corde du cercle eſt coupée perpendiculairement par une autre ligne dans le plan du cercle. Secondement, qu'elle eſt coupée par le milieu. Troiſiémement, que l'arc tendu par cette corde eſt auſſi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde.

Quatriémement, que la ſecante paſſe par le contre du cercle, deux étant données, les autres deux ſuivent néceſſairement.

COROLLAIRE II.

Si les cordes *AB* & *ED* ſont paralléles, les arc *AE* & *BD* compris entre ces paralléles ſont égaux. Car ſi le rayon *CF* eſt perpendiculaire à l'une, il eſt auſſi perpendiculaire à l'autre (*Cor.* 1. *Th.* 8.) & par conſéquent, (*Cor.* 1.) les arcs *EAF* & *DBF* ſont égaux entre eux, auſſi bien que les arcs *AF* & *BF*. Donc (*Ax.*) *EA* & *BD* ſont auſſi égaux. Tab. 4. Fig. 4.

COROLLAIRE III.

Si on ſuppoſe une tangente en *F*, ſavoir *FG*, comme (*Cor.* 5. *Th.* 11.) elle eſt perpendiculaire au rayon *CF*, elle ſera auſſi (*Cor. Th.* 9.) paralléle aux cordes *AB* & *FD*. Donc puiſque (*Cor.* 1.) l'arc *AF* eſt égal à l'arc *FB*, & *EF* eſt égal à l'arc *FD*, il faut auſſi conclure que la tangente & la corde étant paralléles, les arcs qui ſont compris entre elles ſont égaux.

Voilà ce qui regarde la rencontre des lignes droites avec les cerles; voyons maintenant ce qui appartient aux cercles qui ſe rencontrent.

THEOREME XIV.

Lorſque deux cercles ſe rencontrent dans deux points, l'un eſt tellement coupé en deux parties par l'autre, que l'une de ces deux parties eſt toute dedans, l'autre toute hors du cercle qui le coupe. Tab. 4. Fig. 5. & 6

DEMONSTRATION.

Suppoſons deux cercles *AFBM* & *AEBG* qui ſe rencontrent dans deux points *A* & *B*. Que le centre du cercle *AFBM* ſoit *D* & le centre du ſecond ſoit *C*. Je dis que chacun de ces cercles, par exemple, *AFBM* eſt diviſé en deux parties *AFB* & *AMB*, dont l'une *AFB* eſt toute entiere dedans, l'autre *AMB* toute dehors du cercle *AEBG*.

Après avoir mené les rayons *AC* & *BC* du cercle *AE BG*, joignez les centres *C* & *D* par la ligne droite *CD* qui rencontre l'autre cercle *AFBM* en *M*. Toutes les lignes droites qu'on peut mener du point *C* à l'arc *AMB* ſont (*Th.* 10.) toutes plus longues que les rayons *AC* & *BC*; & au contraire toutes les lignes qu'on peut mener du même point *C* à l'arc *AFB* ſont plus courtes que les mêmes rayons *AC* & *BC*. Donc (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) l'arc *AFB* eſt tout entier dedans, & l'autre *AMB* tout entier dehors du cercle *AEBG*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Deux cercles ne peuvent ſe rencontrer que dans deux points. Ce qui a déja été conclu par le Corollaire III. du Théorême XII.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne peuvent ſe toucher que dans un point; car s'ils ſe touchoient dans deux points, ils ſe couperoient. Ce qui eſt contre l'hypothéſe.

THEOREME XV.

Tab. 4. Fig. 7. & 8. La ligne droite qui joint les centres des cercles qui ſe touchent, paſſe par le point où ils ſe touchent.

DEMONSTRATION.

Si les deux cercles *HEG* & *AEB* ſe touchent en *E*; je dis que la ligne droite qui joint leurs centres *C* & *D* paſſe par le point *E* où ils ſe touchent; car ſi on méne du centre de l'un de ces cercles la ligne droite *CE* au point où ils ſe touchent, cette ligne continuée paſſera par le centre de l'autre cercle *D*. Puiſque ces deux cercles ne ſe touchent que dans un point, (*Cor.* 2. *Th.* 14.) & que tous les autres points de la circonference *AEB* ſont hors du cercle *HGE*; la ligne droite *CE* (*Cor.* 4. *Def.* 6.) étant un rayon du cercle *HGE* eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *C* à la circonférence *ABE*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 10.)

la

la ligne *CE* continuée paſſera par le centre *D* de cette circonférence, & ainſi les centres des cercles qui ſe touchent, & le point où ils ſe touchent ſont dans la même ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà ce qui regarde la nature & la ſituation des lignes tant droites que circulaires ; & comme ces lignes circulaires ſont la meſure des angles formés par la différente ſituation des lignes droites, il faut maintenant paſſer à la meſure des angles, très-néceſſaire pour l'intelligence de ce qui appartient aux ſurfaces.

CHAPITRE TROISIEME.

De la meſure des angles rectiliges.

THEOREME XVI.

LA meſure de l'angle qui eſt au centre du cercle eſt l'arc compris entre ſes côtés. Tab. 4. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Le Théorême préſent eſt démontré par la troiſiéme définition, & par le corollaire premier de la définition 6.

COROLLAIRE I.

Ce que l'on dit de l'égalité ou de l'inégalité des angles rectilignes, doit donc s'entendre par l'égalité ou l'inégalité des arcs compris entre les côtés de ces angles & décris de la pointe de ces angles comme du centre avec la même ouverture de compas. Par exemple, ſi du centre *B* on décrit le demi cercle *CEAD*, & qu'on méne deux rayons dont l'un *EB* ſoit perpendiculaire au diamétre *CD*, & l'autre *AB* oblique par rapport au diamétre. Les meſures des angles (*Hypp.*) droits *CBE* & *EBD* ſeront les arcs *CE* & *ED* qui ſont les deux moitiés de la demi-circonférence *CEAD*, ou bien deux quarts de la circonférence entié-

re ; mais la mesure de l'angle obtus *CBA* sera l'arc *CEA* plus grand que le quart de cercle, & la mesure de l'angle aigu *ABD* sera l'arc *AD* plus petit que le quart de cercle ; c'est pourquoi il y en a qui définissent ainsi les angles : L'angle droit est celui qui est égal au quart de cercle ; l'angle obtus, qui est plus grand, & l'angle aigu, qui est plus petit que le quart de cercle. Et ainsi comme on divise le cercle en 360 degrés, ou parties égales ; l'angle droit est de 90 degrés, l'aigu est de moins, & l'obtus de plus de 90 degrés.

COROLLAIRE II.

Un angle est donc égal à un autre angle lorsqu'après avoir décrit des cercles égaux de la pointe de ces angles comme du centre, les arcs compris entre leurs côtés sont égaux, & ces angles sont inégaux lorsque ces arcs sont inégaux, & cet angle est le plus grand, entre les côtés duquel est compris un plus grand arc.

THEOREME XVII.

Tab. 4. Fig. 10, & Tab. 5. Fig. 1.

L'angle qui est entre le centre, & la circonférence du cercle, est égal à la moitié de la somme des arcs compris entre ses côtés, & ceux de l'angle qui lui est opposé au sommet.

DEMONSTRATION.

Si l'angle *ABO* est entre le centre & la circonférence ; je dis qu'il est égal à la moitié de la somme des arcs *AO* & *MN* compris entre ses côtés & ceux de l'angle qui lui est opposé au sommet ; car si on méne par le centre *C* les lignes droites *GE* & *FH* paralléles aux lignes *MO* & *AM* ; l'arc $GM = EO$, & $NH = AF$ (*Cor. 2. Theor. 13.*) & par conséquent (*Ax. 4.*) $GM + NH = AF + EO$; ainsi en ajoûtant des deux côtés $MN + FE$, $GM + MN + NH + FE$ sera $=$ (*Ax. 4.*) $MN + AF + FE + EO$; ou bien $GH + FE = MN + AO$; mais parce que (*Th. 3.*) les angles *GCH* & *FCE* sont égaux entre eux, les arcs *GH* & *FE* (*Cor. 2. Th. 16.*) sont aussi égaux, & par con-

séquent l'arc *FE* est la moitié de la somme *GH* + *FE*. Donc le même arc *FE*, ou bien (*Th.* 16.) l'angle *FCE* est la moitié de la somme *MN* + *AO*; mais (*Déf.* 5.) l'angle *ABO* = *AKE*, & *AKE* = *FCE*. Donc (*Ax.* 6.) l'angle *ABO* est égal à la moitié de la somme des arcs *MN* & *AO*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Le troisiéme cas dans lequel le centre est hors de l'angle proposé, suit nécessairement des précedens. Par exemple, si dans la figure seconde, qui est la premiere de la cinquiéme table, on proposoit l'angle *ABM* hors duquel est le centre *C*, il est évident par ce qui vient d'être démontré, qu'il est égal à la moitié de la somme des arcs *AM* & *NO*, puisque (*Theor.* 1.) *ABO* & *ABM* sont pris ensemble, égaux à deux droits & par conséquent (*Th.* 16.) à la moitié de la circonférence du cercle *AM NO*; puisque aussi l'angle *ABO* est égal à la moitié (*Th. présent*) de la somme des arcs *AO* & *MN*, il faut que l'angle *ABM* soit égal à la moitié de la somme des arcs qui restent; savoir *AM* & *NO*. Donc le présent Théorême est vrai dans tous les cas.

THEOREME XVIII.

L'angle qui est à la circonférence est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtés, soit qu'ils coupent tous deux le cercle, soit que l'un coupe le cercle & l'autre le touche. Tab. 5. Fig. 2. & 3.

DEMONSTRATION.

Si l'angle *ABO* est à la circonférence du cercle, & que ses deux côtés coupent le cercle, comme dans la figure 2. de la cinquiéme table, ou bien que l'un des côtés coupe le cercle, & l'autre le touche, comme dans la figure troisiéme de la même table; je dis que cet angle *ABO* est toûjours égal à la moitié de l'arc *AO* compris entre ses côtés; car si on méne la ligne *GE* paralléle

au côté *BA*, & qui coupe l'autre côté *BO* de l'angle *ABO*, les angles *ABO* & *GKO* (*Déf.* 5.) ſont égaux ; mais (*Th.* 17.) l'angle *GKO* eſt égal à la moitié de la ſomme des arcs *GO* & *BE*, & par conſéquent (*Ax.* 4. *&* 6.) égal à la moitié de la ſomme des arcs *GO* & *XG*, puiſque (*Cor.* 2. *&* 3. *Th.* 13.) les arcs *BE* & *XG* ſont égaux entre eux. Donc l'angle *ABO* eſt égal à la moitié de la ſomme des arcs *GO XG*, ou bien à la moitié de l'arc *XGO* compris entre les côtés du même angle *ABO* qui eſt à la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Tab. 3. Fig. 4. Il ſuit de ce qui vient d'être démontré, que ſi l'un des côtés de l'angle *ABO* qui eſt à la circonférence coupe le cercle, comme le côté *BO* ; l'autre *AB* au contraire ne coupe & ne touche point le cercle, en continuant le côté *AB* juſques en *X*, l'angle *XBO* ſera égal à la moitié de l'arc *XO*, & par conſéquent, comme (*Th.* 1.) les angles *XBO* & *ABO* équivalent à deux droits, qui ſont égaux (*Cor.* 1. *Th.* 16.) à la moitié de la circonférence *BXO*, ou bien à la moitié de la ſomme des arcs *XO*, *XB*, *BO*, il faut que l'angle *ABO* ſoit auſſi égal à la moitié de la ſomme des arcs *BO* & *XB* tendus par les côtés *BO* & *AB* continués juſques en *X*.

COROLLAIRE II.

Tab. 5. Fig. 5. Il ſuit auſſi que les angles *BFC*, & tous ceux qui étant à la circonférence du cercle ſont appuiés ſur le même arc, ſont (*Ax.* 6.) égaux ; car (*Th. pr.*) ils ſont tous égaux à la moitié de l'arc *BC*.

COROLLAIRE III.

Fig. 6. L'angle *BFC* dans le demi cercle *BHFC* eſt un angle droit ; car étant appuié ſur l'autre demi cercle *BGC*, il eſt égal à la moitié de cet arc ; c'eſt-à-dire au quart du cercle, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 16.) c'eſt un angle droit.

COROLLAIRE IV.

L'angle *HFC* eſt donc obtus, & l'angle *GFC* aigu.

COROLLAIRE V.

Enfin l'angle qui eſt au centre eſt le double de celui qui eſt à la circonférence & appuié ſur le même arc de cercle ; car l'angle qui eſt au centre eſt égal (*Th.* 16.) à l'arc entier, & celui qui eſt à la circonférence n'eſt égal (*Th. préſent*) qu'à la moitié du même arc.

Outre les cas démontrés par le préſent Théorême & ſes Corollaires, il y en a deux autres dans leſquels la pointe de l'angle étant à la circonférence, les deux côtés ſont hors du cercle, de telle maniere que l'un des côtés touche ou coupe le cercle, ou bien aucun des côtés de l'angle ne touche & ne coupe le cercle ; mais ces deux cas ſuivent néceſſairement de ceux qui ont été démontrés.

THEOREME XIX.

L'angle qui eſt hors du cercle de quelque maniere que ſes côtés prolongés à l'infini rencontrent le même cercle, eſt égal à la moitié de la différence des arcs, ſavoir de l'arc concave, & du convexe compris entre ſes côtés. Tab. 5. Fig. 7. & Fig. 1. Tab. 6.

DEMONSTRATION.

Si l'angle *ABO* eſt hors de la circonférence du cercle, ſoit que les côtés *AB* & *BO* coupent tous deux le cercle, comme dans la figure 7, ſoit que l'un touche & l'autre coupe le cercle, comme dans la figure 8 ; ſoit enfin que les deux côtés de l'angle touchent le cercle, comme dans la premiere figure de la table 6. Je dis que l'angle *ABO* eſt égal à la moitié de la difference dont l'arc concave *AGO* ſurpaſſe l'arc convexe *HE*. Car ſi on méne la ligne *EG* paralléle au côté *AB*, l'angle *GEX* (*Th.* 18.) ſera égal à la moitié de l'arc *GO*, mais *GO* eſt la difference dont l'arc *AGO* ſurpaſſe l'arc *AG*, ou bien (*Cor.* 2. *Th.* 13.) l'arc *HE* dont l'angle *GEX* eſt égal à la moitié de la différence dont l'arc *AGO* ſurpaſſe l'arc *HE*, & l'angle *GEX*

est égal (*Déf.* 5.) à l'angle *ABO*, parce que (*Hyp.*) *EG* est paralléle à *BA*. Donc (*Ax.* 6.) l'angle *ABO* est égal à la moitié de la difference dont l'arc *AGO* surpasse l'arc *HE*. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà tout ce qui regarde la mesure des angles ; passons maintenant aux surfaces.

LIVRE SECOND.

Des surfaces.

DEFINITION VII.

Tab. 6. Fig. 2. LA surface est une étenduë en long & large seulement, telles sont les extrémités des corps que nous voions, & touchons, puisqu'un corps ne peut pénétrer un autre corps. On appelle *plan* ou *surface plane* celle que tous les points d'une ligne droite touchent nécessairement.

COROLLAIRE I.

Si donc la ligne droite *AC* est dans le plan *DE*, cette même ligne continuée sera toute entiere dans le même plan ; c'est pourquoi l'on dit qu'il ne peut pas se faire qu'une partie de la ligne droite *AC* soit dans le plan *DE*, l'autre *CB* hors du même plan.

COROLLAIRE II.

Comme la ligne droite (*Déf.* 1.) est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point à un autre, de même la surface plane est la plus petite de toutes celles qui ont les mêmes bornes.

COROLLAIRE III.

Il ne peut donc y avoir qu'une surface plane entre les mêmes bornes.

COROLLAIRE IV.

Comme (*Cor.* 2. *Déf.* 1.) deux lignes droites ne peuvent renfermer un eſpace, de même deux plans ; autrement il y auroit pluſieurs plans entre les mêmes bornes: ce qui eſt impoſſible par le Corollaire troiſiéme.

COROLLAIRE. V.

Donc deux lignes droites qui ſe coupent ſont dans le même plan.

THEOREME XX.

Si deux plans *AB* & *CD* ſe coupent, leur interſection commune eſt premiérement une ligne ; ſecondement une ligne droite. Tab. 6. Fig. 3.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si l'interſection de ces deux plans étoit de quelque largeur, comme par exemple, *MNPQ*, ſuppoſons que la ligne droite *RS* eſt continuée dans les parties *Y* & *T* des plans *AB* & *CD* : comme par l'hypothéſe *MNPQ* eſt la partie commune des plans *AB* & *CD*, la ligne droite *RS*, continuée dans ces deux plans iroit de *S* en *Y* dans le plan *AB* & de *S* en *T* dans le plan *CD*, & ainſi les lignes *RSY* & *RST* ſeroient toutes deux droites, & auroient le ſegment *RS* commun ; ce qui eſt impoſſible (*Cor.* 1. *Th.* 2,) donc il eſt auſſi impoſſible que la ſection de ces deux plans ne ſoit pas une ligne : Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la ligne *EF* qui eſt la ſection des plans *AB*, *CD*, n'étoit pas une ligne droite, on pourroit mener des extrémités *E* & *F* deux lignes droites ; l'une *EGF* dans le plan *AB*, & l'autre *EHF* dans le plan *CD*, & pour lors entre ces deux points *E* & *F* il y auroit deux lignes droites ; ce qui eſt impoſſible, (*Cor.* 1. *Déf.* 1.) & par Tab. 6. Fig. 4.

conſéquent il eſt auſſi impoſſible que l'interſection des plans *AB* & *CD* ne ſoit pas une ligne droite : ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Comme les lignes droites (*Cor.* 1. *Th.* 2.) de même les plans qui ſe touchent dans quelques points ſe touchent dans tous leurs points.

COROLLAIRE II.

Les plans ne peuvent avoir un ſegment commun non plus que les lignes.

DEFINITION VIII.

Tab. 6. Fig. 42. L'angle formé par un plan incliné ſur un autre plan eſt le même que celui des lignes menées ſur ces mêmes plans à leur ſection commune. Par exemple, ſi les lignes droites *AL* & *DK* dans les plans *AB* & *DC* ſont perpendiculaires à la ſection commune *EF*, leurs angles *AEK*, *KEL*, *LED*, *DEA* ſont les angles de ces plans, formés par les perpendiculaires menées ſur ces plans à leur ſection commune *EF*.

COROLLAIRE I.

Comme une lignedroite (*Th.* 1.)qui coupe une autre ligne droite, forme des angles droits ou égaux à deux droits; de même le plan *AB* coupant le plan *CD* en *EF* forme deux angles *AEK* & *KEL*, ou tous deux droits ou égaux pris enſemble, à deux droits.

COROLLAIRE II.

Si un plan forme deux angles droits ou égaux à deux droits avec un autre plan; il faut que cet autre plan ſoit un ſeul & même plan.

COR-

COROLLAIRE III.

Tous les angles qui peuvent être formés par des plans autour de leur ſection commune, ſont égaux pris enſemble à quatre angles droits.

COROLLAIRE IV.

Les angles formés par des plans qui ſe coupent, comme les angles *AEK*, *DEL*; ou bien *AED* & *KEL* oppoſés au ſommet ſont égaux.

COROLLAIRE V.

Lorſque les angles oppoſés au ſommet formés par quatre plans, qui ſe rencontrent dans la même ſection, ſont égaux, les deux plans oppoſés ſont diſpoſés en ligne droite.

DEFINITION IX.

La ligne droite *AB* eſt perpendiculaire au plan *CCC*, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes *BC*, & forme avec elles des angles droits dans le plan propoſé. Tab. 6. Fig. 5.

COROLLAIRE.

On ne peut donc mener du même point *A* qu'une ſeule ligne perpendiculaire ſur le même plan *MN*; car ſi on pouvoit mener du point *A* deux perpendiculaires *AD* & *AC* ſur le plan *MN*, les angles *ADC* & *ACD*, par la Définition preſente, ſeroient deux angles droits, ce qui eſt impoſſible. (*Cor.* 2. *Th.* 7.) Donc, il eſt auſſi impoſſible que l'on méne plus d'une ligne perpendiculaire du même point ſur le même plan. Tab. 6. Fig. 6. & Tab. 7. Fig. 1.

DEFINITION X.

Les plans également diſtans dans toutes leurs parties ſont appellés Paralléles.

COROLLAIRE.

Si les plans paralléles ſont coupés par un troiſiéme, leurs

ſections ſeront également diſtantes.

Voilà ce qui regarde la nature des ſurfaces planes ; il faut maintenant examiner leurs différentes figures : il y en a de trois ſortes ; ſavoir, les rectilignes, curvilignes & mixtes : les rectilignes ſont celles qui ſont terminées par des lignes droites ; les curvilignes par des lignes courbes ; les mixtes par des lignes droites & par des courbes : mais nous ne parlerons, à l'exemple d'Euclide, que des rectilignes & des circulaires qui ſont une eſpéce de figures curvilignes.

Comme la figure rectiligne a autant d'angles que de côtés, on peut la diviſer, & par rapport à ſes angles, & par rapport à ſes côtés : mais comme toutes les figures peuvent ſe réduire au triangle en joignant leurs angles par des lignes droites, ou bien en menant d'un point de la figure des lignes droites à tous les angles ; nous examinerons principalement ce qui regarde le triangle, & pour le bien connoître nous parlerons du parallélograme ; c'eſt pourquoi le premier Chapitre ſera des triangles rectilignes, le ſecond des parallélogrames.

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles rectilignes.

DEFINITION XI.

Tab. 7. Fig. 2. LA figure qui a trois côtés, comme la figure *ABC* eſt appellée *triangle* : ſi ſes trois côtés ſont égaux, on l'appelle *équilateral* ; s'il n'y a que deux côtés égaux, *iſoſcéle* ; ſi ſes trois côtés ſont inégaux, *ſcaléne* ; ſi un de ſes angles eſt droit & les deux autres aigus, on le nomme *rectangle* ; ſi un angle eſt obtus, & les deux autres aigus, *ambligone* ; & ſi ſes trois angles ſont aigus, *oxigone*.

THEOREME XXI.

Tab. 7. Fig. 3. Les trois angles d'un triangle ſont toûjours, pris en-

ſemble, égaux à deux droits.

DEMONSTRATION.

Si on décrit un cercle qui paſſe (*Cor.* 8. *Défin.* 6.) par les trois angles du triangle *ABC*, chaque angle ſera égal à la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, (*Th.* 18.) & par conſéquent ces trois angles ſeront égaux à la moitié de la circonférence du cercle *ABC*, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 16.) ils ſont égaux à deux droits : Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les trois angles d'un triangle peuvent être trois angles aigus : mais il ne peut y en avoir qu'un droit, ou un obtus, & jamais un droit avec un obtus.

COROLLAIRE II.

Si l'un des angles d'un triangle, eſt droit, les deux autres pris enſemble ſont égaux à un droit.

COROLLAIRE III.

Les trois angles d'un triangle ſont égaux pris enſemble, aux trois angles d'un autre triangle.

COROLLAIRE IV.

Si dans un triangle il y a deux angles égaux enſemble, ou ſéparément, à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme qui reſtera, ſera auſſi égal au troiſiéme de cet autre triangle.

COROLLAIRE V.

Si on prolonge le côté *AC* juſques en *O*, l'angle externe *BCO* ſera égal aux deux internes oppoſés *A* & *B* pris enſemble ; car, puiſque (*Th.* 1.) les angles *BCA* & *BCO* ſont égaux à deux droits, & que (*Theor. preſent*) les trois angles d'un triangle équivalent auſſi à deux angles droits, les angles *BCA* & *BCO* ſont (*Ax.* 6.) Tab. 7. Fig. 5.

égaux aux trois angles du triangle *ABC*. Donc, en ôtant l'angle commun *BCA*, *BCO* ſera (*Ax.* 5.) égal aux deux internes oppoſés *A* & *B* pris enſemble.

COROLLAIRE VI.

Donc, l'angle externe eſt toûjours plus grand qu'un des angles internes oppoſés.

SCOLIE.

Par le moyen du Théorême preſent, on peut connoître combien les angles internes & externes, d'une figure quelconque, font d'angles droits, en la réduiſant à des triangles. Premiérement, on connoîtra que les angles internes d'une figure rectiligne font deux fois autant d'angles droits, exceptés quatre, qu'il y a de côtés dans la figure, & par conſéquent que toutes les figures rectilignes qui ont le même nombre de côtés, ont auſſi la même ſomme d'angles droits. Secondement, que tous les angles externes, d'une figure rectiligne, font quatre angles droits, ou bien égaux à quatre droits, & par conſéquent que toutes les figures rectilignes ont des angles externes qui font la même ſomme d'angles droits.

THEOREME XXII.

Premiérement, dans un triangle les côtés égaux ſont oppoſés à des angles égaux.

Secondement, les angles égaux ont des côtés oppoſés, qui ſont auſſi égaux.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Tab. 7. Fig. 4. Suppoſons qu'un cercle eſt décrit autour du triangle *ABC*, ſi les côtés *AB* & *BC* ſont égaux, les arcs *AB* & *BC* ſont auſſi égaux, (*Cor.* 6. *Th.* 10.) donc les angles *C* & *A* oppoſés à ces côtés (*Th.* 18.) ſont égaux entr'eux: ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si les angles *C* & *A* ſont égaux, les arcs *AB* & *BC* (*Th.* 18.) ſont auſſi égaux. Donc, (*Cor. 6. Th.* 10.) leurs cordes, ou bien les côtés *AB* & *BC* ſont auſſi égaux : ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la premiére partie, qu'un triangle iſoſcéle, c'eſt-à-dire, qui a deux côtés égaux, a auſſi les deux angles oppoſés à ſes côtés, égaux.

COROLLAIRE II.

Le triangle équilateral, c'eſt-à-dire, dont tous les côtés ſont égaux, a auſſi tous ſes angles égaux.

COROLLAIRE III.

Il ſuit de la ſeconde partie, que le triangle qui a deux angles égaux, eſt iſoſcéle ; c'eſt-à-dire, a deux côtés égaux.

COROLLAIRE IV.

Le triangle, qui a tous ſes angles égaux, eſt auſſi équilateral ; c'eſt-à-dire, a tous ſes côtez égaux.

THEOREME XXIII.

Premiérement, dans un triangle, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle. Tab. 7. Fig. 4.

Secondement, le plus grand angle eſt auſſi oppoſé au plus grand côté.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si autour du triangle *ABC* eſt décrit un cercle de la maniére marquée dans le Corollaire 8. de la définition 6, & que le côté *AB* ſoit plus grand que *BC*; l'arc *AB* (*Cor. 5. Theor.* 10.) ſera plus grand que l'arc *BC*. Donc (*Th.* 18.) l'angle oppoſé au plus grand côté *AB*, ſera auſſi

plus grand, que l'angle opposé au côté *BC*, qui est plus petit. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si l'angle *C* est plus grand que l'angle *A*, l'arc *AB* sera (*Th.* 18.) plus grand que l'arc *BC*. Donc le côté *AB* (*Cor.* 4. *Th.* 10.) sera plus grand que le côté *BC*. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXIV.

Premiérement, si de deux triangles dont l'un a deux côtés égaux à deux côtés de l'autre, l'angle compris entre les deux côtés égaux de l'un est plus grand que l'angle compris entre les deux côtés de l'autre; la base de l'un sera aussi plus grande que la base de l'autre.

Secondement, si l'un de ces triangles a une base plus grande que l'autre, l'angle compris entre ses côtés égaux aux côtés de l'autre triangle, sera aussi plus grand que l'angle de cet autre triangle, compris entre ces mêmes côtés.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Tab. 7. Fig. 5. & 6. Si les côtés *CE* & *CF* du triangle *EFC* sont égaux aux deux côtés *EC* & *CA* du triangle *ECA*, & que l'angle *ECA* soit plus grand que l'angle *ECF*, je dis que la base *EA* sera aussi plus grande que la base *EF*; car si on décrit du point *C* un arc de cercle dont *CA* soit un rayon, & qui rencontre le côté *EC* dans le point *H*. Puisque, par l'hypothése, *CA* & *CF* sont égaux, le même arc (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) passera par le point *F*; & comme, par l'hypothése, l'angle *ECA* est plus grand que l'angle *ECF*, l'arc *AH* (*Th.* 16.) sera aussi plus grand que l'arc *FH*. Donc (*Part.* 2. *Th.* 10.) la base *EA* sera plus grande que la base *EF*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la base *EA* est plus grande que la base *EF*, je dis que l'angle *ECA* est aussi plus grand que l'angle *ECF*: car

(*Partie* 2. *Th.* 7.) Si *EA* eſt plus grand que *EF*, l'arc *HA* eſt plus grand que l'arc *HF*. Donc (*Th.* 16.) l'angle *ECA* eſt plus grand que l'angle *ECF*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si donc deux triangles ont chacun un angle égal à l'angle de l'autre, & que ces angles égaux ſoient auſſi compris entre des côtés égaux ; la baſe de l'un ſera auſſi égale à la baſe de l'autre, & un de ces triangles ſera en tout égal à l'autre.

COROLLAIRE II.

Si la baſe de l'un eſt égale à la baſe de l'autre, les angles oppoſés à ces baſes & compris entre des côtés égaux, ſeront auſſi de la même grandeur.

COROLLAIRE III.

Les triangles qui ont des côtés égaux, ont auſſi des angles égaux ; mais les triangles qui ont des angles égaux, n'ont pas toûjours des côtés égaux ; car les triangles *ECA* & *BCF* ont des angles égaux, (*Déf.* 5.) puiſque les lignes *EA* & *BF* ſont paralléles, cependant leurs côtés ne ſont pas égaux. Tab. 7. Fig. 7.

Pour mieux connoître ce qui regarde les triangles, il faut examiner ce qui appartient aux Parallélogrames.

CHAPITRE SECOND.

Des Parallélogrames.

DEFINITION XII.

ON appelle *Parallélograme* toute figure de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ſont paralléles, comme ceux de la figure *A*. Les autres figures de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ne ſont point paralléles, ſont appellées *trapézes*. Tab. 7. Fig. 8.

Si tous les angles du parallélograme ſont droits, on le nomme *rectangle* : Si tous ſes angles ne ſont pas des angles droits, on l'appelle *rhomboïde*.

Si tous les côtés du Parallélograme rectangle ſont égaux, on le nomme *quarré* ; ſi tous ſes côtés ne ſont pas égaux on l'appelle *rectangle*.

La ligne droite tirée d'un angle du parallélograme, à l'angle oppoſé, eſt appellée *diagonale*.

DEFINITION XIII.

Les figures, qui ont plus de quatre côtés, ſont appellées indéfiniment *Poligones*, & on les diſtingue par le nombre des côtés : la figure de 5 côtés ſe nomme Pentagone.

De 6, Héxagone.
De 7, Heptagone.
De 8, Octogone.
De 9, Ennéagone.
De 10, Décagone.
De 11, Endécagone.
De 12, Dodécagone.
De 1000, Kiliogone.
De 10000, Myriogone.

THEOREME XXV.

Les lignes compriſes entre des lignes paralléles & égales, ſont auſſi paralléles & égales.

DEMONSTRATION.

Tab. 7. Fig. 9. Si les lignes *AB* & *CD* ſont paralléles & égales, je dis que les lignes *AC* & *BD* ſont auſſi paralléles & égales ; car en menant la ligne *BC*, les angles *ABC* & *BCD* (*Th.* 8.) ſont égaux, parce que *AB* & *CD*, par l'hypothéſe, ſont paralléles. Donc puiſque *AB* & *CD* ſont auſſi égales, & que le côté *BC* eſt commun aux deux triangles *ABC* & *BCD*, ces deux triangles auront chacun deux côtés égaux à deux côtés ; ſavoir *AB* & *BC* égaux à *DC* & *BC*, & les angles compris

compris entre ces côtés ſont auſſi égaux, puiſque *ABC* eſt égal à *DCB*, & ainſi (*Cor.* 1. *Th.* 24.) leurs baſes *AC* & *BD* ſont auſſi égales. Donc *AC* & *BD* ſont paralléles & égales. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXVI.

Premiérement, la figure de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ſont égaux, eſt un Parallélograme. Tab. 7. Fig. 9.

Secondement, les côtés oppoſés du Parallélograme, ſont égaux.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si les côtés oppoſés de la figure *ABCD* ſont égaux, ſavoir, *AB* égal *CD* & *AC* égal *BD*, je dis que cette figure eſt un parallélograme; car en menant la ligne *CB*, les triangles *CAB* & *CBD* ſont équilateraux; donc ils ſont auſſi (*Cor.* 3. *Th.* 24.) équiangles; c'eſt-à-dire, que l'angle *ABC* eſt égal à l'angle *BCD*, & l'angle *ACB* égal à l'angle *DBC*. Donc (*Th.* 9.) *AC* & *BD*, comme *AB* & *CD* ſont paralléles, & par conſéquent (*Déf.* 12.) la figure *AB CD* eſt un parallélograme. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la figure *ABDC* eſt un parallélograme, les côtés oppoſés *AB* & *CD* ſont égaux; car ſi l'un des deux, par exemple, *CD* étoit plus grand que l'autre *AB*, & que *DO* fut égal à *AB*, pour lors *AB* & *DO* ſeroient, par l'hypothéſe, deux lignes paralléles & égales. Donc (*Th.* 25.) *AO* & *BD* ſeroient auſſi paralléles. Mais par l'hypothéſe, *AC* & *BD* ſont auſſi paralléles. Donc (*Cor. Def.* 5.) *AC* & *AO* ſeroient auſſi paralléles. Ce qui eſt (*Cor.* 2. *Th.* 8.) impoſſible. Donc il eſt auſſi impoſſible que l'une des deux paralléles ſoit plus grande que l'autre, & par conſéquent elles ſont néceſſairement égales. On peut de même prouver que *AC* & *BD* ſont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Tab. 8. Fig. 1. Deux lignes paralléles quelques courtes qu'elles ſoient, ſont par tout également diſtantes. Car ſi on méne des points *A* & *B* de la ligne *AB*, deux perpendiculaires à l'autre ligne paralléle *AB*, ces deux lignes (*Cor. Th.* 9.) ſeront auſſi paralléles. Donc *ABDC* ſera un paralléloграme, & par conſéquent (*Th. préſent*) *AC* & *BD* ſeront égales. On peut démontrer la même choſe de toutes les autres lignes perpendiculaires qui peuvent être menées de l'une de ces paralléles *AB* à l'autre *CD*. Donc ces paralléles ſont par tout également diſtantes.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de là ce qui a déja été conclu par le Corollaire 2. du Théorême 8. ſavoir, que deux paralléles prolongées à l'infini ne ſe rencontrent jamais.

COROLAIRE III.

Tab. 8. Fig. 2. Il ſuit auſſi que le paralléloграme *ABCD* eſt coupé par la moitié par la diagonale *CB*. Car (*Th. préſent*) *AC* étant égal à *BD* & *AB* égal à *CD*, & *CB* étant un côté commun aux deux triangles *ABC* & *BCD*, ces deux triangles ſont équilatéraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux entre eux.

THEOREME XXVII.

Tab. 8. Fig. 3. Premiérement, les paralléloграmes qui ſont ſur la même baſe & entre les mêmes paralléles ſont égaux.

Secondement, ceux qui ayant la même baſe ſont égaux, ſont entre les mêmes paralléles.

Troiſiémement, ceux qui ſont égaux & entre les mêmes paralléles, ont auſſi la même baſe.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si entre les mêmes paralléles *AH* & *EO* & ſur la même baſe *EF* il y a deux paralléloграmes *AEFK* &

ECHF que je nommerai dans la ſuite pour abréger, *AF* & *EH*; je dis que ces deux parallélogrames ſont égaux. Car (*Partie* 2. *Th.* 26.) *AK* eſt égal à *EF* & *EF* = *HC*. Donc (*Ax.* 4.) en ajoûtant la partie commune *CK*, *AC* ſera = *KH*; mais par la partie ſeconde du Théorême 26. *AE* = *KF* & *EC* = *FH*. Donc les triangles *AEC* & *KFH* ſont équilateraux & (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux. Donc en ôtant le triangle commun *KGC*, les trapézes qui reſteront *AEGK* & *CGFH* (*Ax* 5.) ſeront égaux. Donc en ajoûtant des deux côtés le triangle commun *EGF*, les parallélogrames *AF* & *EH* (*Ax.*4.) ſeront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si ſur la même baſe *EF* il y a deux parallélogrames égaux *AEFK* & *CEFH*, je dis que ces deux parallélogrames ſont entre les mêmes paralléles; car ſi la ligne *AK* prolongée rencontroit les côtés *EP* & *FQ* en *PQ* au-deſſus ou au-deſſous de *CH*, les parallélogrames (*Part.* 1.) *AEFK* & *EFPQ* ſeroient auſſi égaux, & ainſi (*Ax.* 6.) les parallélogrames *PEFQ* & *CEFH* ſeroient égaux, & le tout égal à ſa partie, ce qui eſt impoſſible par l'axiome ſecond. Donc il eſt auſſi impoſſible que *AK* prolongé rencontre les côtés *EP* & *FQ* au-deſſus ou au-deſſous de *CH*. Donc elle rencontrera ces deux côtés en *CH*, & par conſéquent les deux parallélogrames égaux ſur la même baſe, ſont auſſi entre les mêmes paralléles. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 8. Fig. 3.

DEONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Si entre les lignes paralléles *AL* & *EO* il y a deux parallélogrames égaux *AF* & *CO*, je dis que s'ils n'ont pas la même baſe, leurs baſes *EF* & *GO* ſont du moins égales. Car ſi l'une, par exemple *GO* étoit plus grande que l'autre *EF*, & que *GP* fût = *EF*, le parallélograme *CG PH*, par la partie premiére, ſeroit égal au parallélograme *AKEF* qui eſt égal, par l'hypothéſe, au parallélogra- Tab. 8. Fig. 4.

me *CGOL*, & pour lors le tout ſeroit égal à ſa partie, ce qui eſt (*Ax.* 2.) impoſſible. Donc il eſt auſſi impoſſible que les baſes *EF* & *GO* ne ſoient pas égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Puiſque (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les triangles ſont les moitiés des parallélogrames qui ont les mêmes baſes & qui ſont entre les mêmes paralléles; il ſuit de la premiére partie, que les triangles qui ont la même baſe, ou des baſes égales, & & qui ſont entre les mêmes paralléles ſont égaux. Comme on le peut démontrer en ajoûtant aux parallélogrames, dont on vient de parler, des lignes diagonales.

COROLLAIRE II.

Il ſuit auſſi de la ſeconde partie que les triangles qui ont la même baſe, ou des baſes égales, & qui ſont égaux, ſont entre les mêmes paralléles.

COROLLAIRE III.

Il ſuit de la troiſiéme partie que les triangles qui ſont égaux & entre les mêmes paralléles, ont la même baſe, ou des baſes égales.

SCOLIE.

Tab. 8. Fig. 5. Si le côté *AE* du parallélograme rectangle *AEFK* eſt tranſporté perpendiculairement par toute la ligne *EF*, ou bien la ligne *EF* par le côté *AE*, le rectangle *AEFK* ſera produit par ce mouvement. C'eſt pourquoi on dit que le rectangle eſt formé en multipliant un de ſes côtés par un de ceux qui lui ſont contigus; par exemple, ſi *EF* eſt de trois piéds & *AE* de quatre en multipliant trois par quatre, le produit ſera douze piéds quarrés qui font l'aire du rectangle *AEFK*.

Tab. 8. Fig. 8. Il ſuit de là & du théorême préſent, que l'aire d'un parallélograme quelconque, par exemple, du parallélograme *AEFK* eſt égal au produit de ſa baſe *EF* par ſa

hauteur *AE* qui eſt perpendiculaire entre les paralléles *AH* & *EO* ; car l'aire du rectangle *AEFK* eſt égale au parallélograme *EFHC* par le théorême préſent ; mais le parallélograme rectangle *AEFK* eſt produit par ſa baſe *EF* multipliée par ſa hauteur. Donc l'aire d'un parallélograme quelconque eſt égale à ſa baſe multipliée par ſa hauteur perpendiculaire entre ſes paralléles.

Puiſque (*Cor. 3. Th. 26.*) le triangle eſt la moitié du parallélograme qui a la même baſe & la même hauteur, l'aire du triangle eſt égale à ſa baſe multipliée par la moitié de ſa hauteur ; c'eſt-à-dire, par la moitié de la perpendiculaire menée de la pointe de l'angle à ſa baſe, ou bien l'aire du triangle eſt égale à ſa hauteur multipliée par la moitié de ſa baſe.

Comme les proportions ſont abſolument néceſſaires pour l'intelligence de ce qui ſuit, il faut paſſer au troiſiéme Livre.

LIVRE TROISIEME.

Des proportions en général.

DEFINITION XIV.

ON appelle *raiſon* l'égalité ou l'inégalité qui ſe trouve entre les grandeurs que l'on compare. Si on la conſidére par rapport à la différence dont la plus grande ſurpaſſe la plus petite, on l'appelle *raiſon arithmétique* : Par exemple, ſi on conſidére que 6 ſurpaſſe 2, ou que 2 eſt ſurpaſſé par 6 de quatre unités, l'inégalité de ces nombres ainſi conſiderée eſt appellée raiſon arithmétique. Si l'on conſidére l'inégalité de ces quantités du côté de la maniére dont la plus grande contient la plus petite, ou bien la plus petite eſt contenuë dans la plus grande ; on la nomme *raiſon géométrique* : Par exemple, ſi on conſidére que ſix contient

deux, trois fois; ou bien que deux ſont contenus trois fois dans ſix; cette inégalité ainſi conſiderée eſt appellée *raiſon géométrique*, de laquelle nous allons parler.

COROLLAIRE.

Il ſuit de là qu'il n'y a aucun rapport qu'entre les grandeurs homogénes; c'eſt-à-dire de même eſpéce, comme entre une ligne & une ligne, une ſurface & une autre ſurface, entre un corps & un autre corps; car il n'y a que les quantités homogénes qui ſoient contenuës les unes dans les autres.

DEFINITION XV.

La grandeur que l'on compare eſt appellée *antécédent*, celle avec laquelle on la compare ſe nomme *conſéquent*: Par exemple, ſi on compare A avec B, A eſt l'antécedent & B le conſéquent; & A & B ſont les termes de cette *raiſon*.

COROLLAIRE.

Comme l'on peut comparer B avec A auſſi bien que A avec B, la même quantité peut être tantôt l'antécédent, tantôt le conſéquent.

DEFINITION XVI.

Lorſque l'antécédent & le conſéquent d'une raiſon ſont égaux, on appelle ce rapport, *raiſon d'égalité*; s'ils ſont inégaux, on la nomme *raiſon d'inégalité*.

DEFINITION XVII.

Deux raiſons ſont appellées ſemblables, égales, les mêmes, lorſque l'antécédent de l'une contient ſon conſéquent, comme l'antécédent de l'autre contient le ſien.

COROLLAIRE I.

Deux grandeurs égales ont le même rapport à une même troiſiéme.

COROLLAIRE II.

Les grandeurs qui ont le même rapport à une troiſiéme ſont égales.

DEFINITION XVIII.

Lorſque l'antecédent d'une raiſon ne contient pas ou n'eſt pas contenu dans ſon conſéquent, comme l'antecédent de l'autre contient ou eſt contenu dans le ſien ; on appelle ces raiſons *inégales*, *diſſemblables*, *différentes*.....

DEFINITION XIX.

On appelle *proportion* l'égalité de deux raiſons ; c'eſt pourquoi, ſi les rapports de A à B, & de C à D ſont égaux, on nomme leurs termes, ou les grandeurs A, B, C, D, proportionnelles, & on l'exprime ainſi ; A eſt à B comme C eſt à D, ce que l'on écrit de la maniere ſuivante $A.B::C.D$.

AXIOME IX.

Les choſes que l'on multiplie également reſtent dans le même rapport ; ainſi ſi les rapports de A à B & de C à D ſont ſemblables, en les multipliant également ils reſteront les mêmes, & par conſéquent $A.B::2A.2B$ & $C.D::2C.2D$ &c. & $2A.2B::2C.2D$.

COROLLAIRE I.

Si on multiplie donc deux ou pluſieurs grandeurs par la même, les produits ſeront entr'eux comme les grandeurs multipliées.

COROLLAIRE II.

Les parallélogrames BA & AD de la même hauteur AC, ſont entr'eux comme les baſes BC & DC. Tab. 8. Fig. 6.

LEMME PREMIER.

Des Proportions.

Tab. 8. Fig. 7 Premiérement, ſi *AD. DB :: CD. DE*, les parallélogrames *AE* & *CB* ſeront égaux.

Secondement, ſi les parallélogrames *AE* & *CB* ſont égaux *AD. DB :: CD. DE.*

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

AE. (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *DH :: AD. DB* (*l'Hypothéſe*) :: *CD. DE* (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) :: *CB. DH.* Donc (*Cor.* 2. *Déf.* 17.) *AE* = *CB.* Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Puiſque par l'hypothéſe, *AE* = *CB* (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE. DH :: CB. DH.* Mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AE. DH :: AD. DB* & *CB. DH :: CD. DE.* Donc, *AD. DB :: CD. DE.* Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de là, que le parallélograme formé par les extrêmes de quatre termes proportionnels, eſt égal au parallélograme formé par les moyens.

De ce Lemme ſuivent ſept régles ſur leſquelles toute la dialectique des Mathématiciens eſt preſque entiérement fondée.

PREMIERE REGLE.

Si *AD. DB :: CD. DE* cette concluſion eſt bonne;
Tab. 8. Fig. 7. *invertendo : DB. AD :: DE. CD.*

DEMONSTRATION.

Puiſque par l'hypothéſe, *AD. DB :: CD. DE. AE* (*part.* 1. *Lem.* 1.) ſera = *CB.* Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *DH. AE :: DH. CB.* Mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *DH. AE :: DB. AD* & *DH. CB :: DE. CD.* Donc, *DB. AD :: DE. CD.* Ce qu'il falloit démontrer.

SEC-

SECONDE REGLE.

Si *AD. CD :: DB. DE*, cette concluſion eſt juſte : *alternando*, *AD. DB :: CD. DE.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe*) *AD. CD :: DB. DE*, *AE* ſera (*Lem.* 1.) = *CB*. Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE DH :: CB. DH*; Mais, (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AE. DH :: AD. DB* & *CB. DH :: CD. DE*. Donc. *AD. DB :: CD. DE*. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIEME REGLE.

Si *AD. DB :: CD. DE*, cette concluſion eſt bonne. Donc, *componendo*, *AD + DB. DB :: CD + DE. DE*.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe.*) *AD. DB :: CD. DE*; *AE* ſera (*Lem.* 1.) = *CB*. Donc, en ajoûtant de chaque côté *DH*, *AH* (*Ax.* 4.) ſera = *CH*, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Déf* 17.) *AH. DH :: CH. DH*. mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AH. DH :: AB. DB*, & *CH. DH :: CE. DE*. Donc, *AB. DB :: CE. DE*, c'eſt-à-dire, *AD + DB. DB :: CD + DE. DE*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 8. Fig. 7.

REGLE QUATRIEME.

Si *AB. DB :: CE. DE*. Donc, *dividendo*, *AB — DB. DB :: CE — DE. DE*.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe.*) *AB. DB :: CE. DE*. Donc *AB. EH :: CE. BH*, & par conſéquent (*Lem.* 1.) *AH* = *CH*. Donc, en ôtant de chaque côté *DH*, il reſtera (*Ax.* 5.) *AE* = *CB*, & ainſi *AE. DH :: AD. DB*, & *CB. DH :: CD. DE*. Donc, *AD. DB :: CD. DE*, ou bien *AB — DB. DB :: CE — DE. DE*. Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE CINQUIEME.

Si *AB· DB :: CE· DE.* Donc, *convertendo*, *AB· AD :: CE· CD.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe*) *AB· DB :: CE· DE.* Donc (*Lem.* 1.) comme dans la Démonſtration précedente, *AH* eſt = *CH*, & en ôtant de chaque côté *DH*, *AE* ſera (*Ax.* 5.) = *CB*, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AH· AE :: CH· CB :* mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AH· AE :: AB· AD*, & *CH· CB :: CE· CD.* Donc *AB· AD :: CE· CD.* Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE SIXIEME.

Si pluſieurs grandeurs comme *AD, DB, BQ*; & *CD, DE, EM* ſont telles que *AD· DB :: CD· DE* & *DB· BQ :: DE· EM*, cette concluſion eſt bonne : Donc, *ex proportione ordinata*, *AD· BQ :: CD· EM.*

Tab. 8. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe*) *AD· DB :: CD· DE*; *AE* (*Lem.* 1.) ſera = *CB.* & comme (*l'hypothéſe*) *DB· BQ :: DE· EM*, c'eſt-à-dire, *EH· HP :: BH· HN*, *BP* ſera auſſi (*Lem.* 1.) = *EN.* Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE· BP :: CB· EN.* Mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AE· BP :: AD· BQ*, & *CB· EN :: CD· EM.* Donc, *AD· BQ :: CD· EM.* Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE SEPTIEME.

Si pluſieurs grandeurs *AD, DB, BQ*; & *CD, DE, EM* ſont telles que *AD· DB :: DE· EM*, & *DB· BQ :: CD· DE*, cette concluſion eſt bonne ; donc, *ex proportione turbatâ*, *AD· BQ :: CD· EM.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hypothéſe*) *AD· DB : DE· EM*, c'eſt-à-dire,

FE· EH :: *DE· EM*, *FM* (*Lem.* 1.) ſera = *DH·* de même puiſque (*l'hypothéſe*) *DB· BQ* :: *CD· DE* :: *GB· BH*, *DH* ſera auſſi (*Lem.* 1.) = *GQ*. Donc, (*Ax.* 6.) *FM* = *GQ* & ainſi (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *FM· HO* :: *GQ· HO*; mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *FM· HO* :: *FE· HP*, & *GQ· HO* :: *GB· HN*. Donc *FE· HP* :: *GB· HN*, c'eſt-à-dire, *AD· BQ* :: *CD· EM*. Ce qu'il falloit démontrer.

Tout ce que Euclide a dit des proportions, eſt renfermé dans ces ſept regles, qui ſont la baſe & le fondement de la Dialectique des Mathématiciens, comme on le verra par l'application de ces regles qui ſuffiſent pour l'intelligence de tout ce qui appartient aux proportions en general.

LIVRE QUATRIEME.

Des proportions des lignes droites, & des figures qu'elles contiennent.

NOus diviſerons ce Livre en deux Chapitres; dans le premier nous démontrerons les élémens de ces grandeurs comparées entr'elles, & dans le ſecond, la maniére de les meſurer, ce qu'on appelle ordinairement la *Trigonometrie.*

CHAPITRE PREMIER.

THEOREME XXVIII.

LEs aires des parallélogrames & des triangles en général, ſont entr'elles, comme les produits de leur hauteur par leur baſe.

DEMONSTRATION.

L'aire des parallélogrames n'eſt autre choſe (*ſcolie*

Th. 27.) que le produit de leur hauteur par leur baſe, & les triangles ſont la moitié du produit de leur hauteur par leur baſe. Donc en général les aires des parallélogrames & des triangles, ſont entr'elles comme les produits de leur hauteur par leur baſe. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc, les hauteurs & les baſes étant égales ou en raiſon réciproque, les parallélogrames & les triangles ſont égaux (*Lem.* 1.) Par la même raiſon, les parallélogrames & les triangles étant égaux, les hauteurs & les baſes ſont égales

COROLLAIRE II.

Les hauteurs étant égales (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) ils ſont comme les baſes.

COROLLAIRE. III.

Les baſes étant égales, ils ſont (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) comme les hauteurs.

DEFINITION XX.

On appelle *figures égales* celles qui ont tous leurs angles égaux & les côtés proportionnels. On nomme *homologues* les côtés qui répondent à des angles égaux.

THEOREME XXIX.

Premiérement, la ligne paralléle à la baſe d'un triangle coupe ſes côtés proportionnellement.

Secondément, la ligne qui coupe les côtés d'un triangle proportionnellement, eſt paralléle à ſa baſe.

Tab. 8. Fig. 8.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si la ligne *DE* eſt paralléle à la baſe *BC* du triangle *ABC*, je dis qu'elle coupe les côtés de ce triangle proportionnellement; c'eſt-à-dire, que *AD. DB :: AE. EC.*

Car puiſque (*l'hypothéſe*) *DE* & *BC* ſont paralléles, en tirant les deux lignes *DC* & *BE*, les deux triangles *DEB* & *DCE* (*Cor.* 1. *Th.* 27.) ſeront égaux entr'eux. Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) le triangle *ADE* ſera en même raiſon avec ces deux triangles; mais (*Cor.* 2. *Th.* 28.) le triangle *ADE*· *DEB* :: *AD*· *DB*, & le même triangle *ADE*· *EDC* :: *AE*· *BC*· Donc *AD*· *DB* :: *AE*· *EC*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si *AD*· *DB* :: *AE EC*, je dis que les lignes droites *DE* & *BC* ſont paralléles; car ſi elles n'étoient pas paralléles, en tirant la ligne *BO* paralléle à *DE*, pour lors (*Partie* 1.) *AD*· *DB* :: *AE*· *EO*; mais (*l'hypothéſe*) *AD*· *DB* :: *AE*· *EC* Donc *AE* ſeroit à *EO* :: *AE*· *EC*, & ainſi (*Cor.* 2. *Déf.* 17.) *EO* ſeroit = *EC*, & *EC* la même choſe que *EO*, ou bien la partie égale au tout; donc, *DE* & *BC* ſont paralléles entr'elles : Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De la premiére Partie il ſuit, que les triangles *DAE* & *BAC* qui ont des angles égaux, ſont ſemblables, & que leurs côtés homologues ſont proportionnels.

Premiérement *BA*· *AD*:: *CA*· *AE*; car puiſque, par l'hypothéſe, l'angle *ADE* eſt = *ABC*, les lignes *DE* & *BC* ſont (*Déf.* 5.) paralléles, & par conſéquent, par la partie premiere, *AD*· *DB* :: *AE*· *EC*· Donc (*Reg.* 1. *propor. Invertendo*) *DB*· *AD* :: *EC*· *AE*, & (*Reg.* 3. *componendo*) *DB* + *AD*· *AD*· :: *CE* + *AE*· *AE*, c'eſt-à-dire, *BA*· *AD*:: *CA*· *AE*·

Secondement, ſi *DF* eſt ſuppoſé paralléle à la ligne *AC*, par la même raiſon *BC*· *FC*·, ou bien (*Th.* 26.) *DE*:: *BA*· *AD*. Donc ces triangles équiangles ont tous leurs côtés proportionnels, & ſont (*Déf.* 20.) ſemblables entre eux.

Ce Corollaire eſt le principe dont on ſe ſert pour meſu-

rer toutes sortes de longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs.

COROLLAIRE II.

Tab. 8. Fig. 8. Si deux triangles *BAC* & *DAE* ont un angle égal de part & d'autre, compris entre les côtés *BA*, *AC* & *DA*, *AE* proportionnels, de sorte que *BA*· *DA* :: *AC*· *AE*, ces deux triangles seront encore semblables ; car pour lors les lignes *DE* & *BC* sont paralléles, & par conséquent les angles qui sont en *D* & *E* du triangle *DAE* sont égaux aux angles *B* & *C* du triangle *BAC*. Donc (*Cor.* 1.) Ces triangles sont semblables.

COROLLAIRE III.

Tab. 8. Fig. 9. & 10. Tous les angles & tous les côtés, & même les aires de deux triangles, comme *ABC* & *DEF* sont égales, lorsque le côté *BC* du triangle *ABC*, est égal au côté *DE* du triangle *DEF*, & que les angles adjacens à ces côtés, sont égaux ; savoir l'angle *C* = à l'angle *E* & *B* = *D*. Car (*Cor.* 4. *Th.* 21.) les angles de l'un de ces triangles, sont égaux aux angles de l'autre, & par conséquent (*Cor.* 1.) leurs côtés sont proportionnels, & *BC*· *DE* :: *AB*· *DF* :: *AC*· *FE*. Donc, puisque par l'hypothése, *BC* = *DE*, *AB* sera aussi = *FD*, & *AC* = *FE*, & ainsi ces triangles seront équilatéraux, & (*Cor.* 3. *Th.* 24) égaux en tout.

COROLLAIRE IV.

Tab. 8. Fig. 11. Si les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DA* d'une figure rectiligne de quatre côtés, sont divisés chacun en deux parties égales en *F*, *G*, *H*, *E*, & que les points des divisions soient joints par les lignes droites *FE*, *EH*, *HG*, *GF*, la figure quadrilaterale *FEHG* est un parallélograme ; car en menant les lignes *DB*, & *AC*, comme par l'hypothése, *AF* = *FB* & *AE* = *ED*, *AF*· *FB* :: *AE*· *ED*, & ainsi (*Part.* 2.) *EF* est paralléle à *DB*. De même puisque, par l'hypothése, *BG* = *GC*, & *DH* = *HC* ; *BG*· *GC* :: *DH*· *HC*, & par conséquent (*Part.* 2.) *GH* sera encore paralléle à la ligne *BD*. Donc *EF* & *GH* sont paralléles à la même troisiéme

ligne, elles ſont donc auſſi paralléles entre elles.

On peut par la même raiſon prouver que les lignes *FG* & *EH* ſont paralléles à la ligne droite *AC*, & par conſéquent paralléles entre elles. Donc le quadrilatére *EFGH* eſt un parallélograme.

COROLLAIRE V.

Tab. 9 Fig. 1.

Les parallélogrames *AEQF*, *ACPD* équiangles, ſont comme les produits de *AE* multiplié par *AF*, & de *AD* multiplié par *AC*; car en menant la ligne *GB* perpendiculaire aux côtés prolongés *QF* & *PC*; *AG*· *AF* :: *AB*· *AC*. Donc (*Regl. 2. prop. alternando*) *AG*· *AB* :: *AF*· *AC*. Donc en multipliant les antécédens par *AE* & les conſéquens par *AD*; *AG* × *AE*· *AB* × *AD* :: *AF* × *AE*· *AC* × *AD*; mais par le ſcolie du Théorême 27, *AG* × *AE* = au parallélograme *AEQF*, & *AB* × *AD* = au parallélograme *ACPD*. Donc ces deux parallélogrames ſont comme les produits de *AF* × *AE* & de *AC* × *AD*. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXX.

Les parallélogrames ſemblables, ſont comme les quarrés des côtés homologues.

Tab. 9. Fig. 2. & 3.

DEMONSTRATION.

Si les deux parallélogrames *ABCD* & *EFGH* ſont ſemblables, & que leurs côtés *BC* & *FG* ſoient homologues; je dis que ces parallélogrames ſont entre eux, comme les quarrés de ces côtés homologues. Qu'on méne des extrémités de ces côtés homologues des lignes perpendiculaires *BO*, *CP*, *FK*, *GL* aux côtés oppoſés, & qu'on prolonge ces lignes perpendiculaires juſques en *QR* & *MN*, de maniére que les deux quarrés *BR* & *FN* ſoient formés.

Cela étant fait, il eſt clair (*Cor. 2. Ax. 9.*) que *OC*· *BR* :: *OB*· *BQ*, & *KG*· *FN* :: *KF*· *FM*; mais par l'hypothéſe, *BR* & *FN* ſont deux quarrés. Donc (*Déf. 12.*) *BQ* = *BC* & *FM* = *FG*. Donc *OC*· *BR* :: *OB*· *BC*, & *KG*·

FN : : *KF*· *FG*. De plus les angles *A* & *E* des parallélogrames *BD* & *FH* étant égaux, par l'hypothéſe, entre eux, leurs complémens à deux droits *OAB* & *KEF* ſont auſſi (*Th.* 1. *& l'Ax.* 5.) égaux & les angles *O* & *K* étant des angles droits (*Def.* 4.) les triangles *AOB* & *KFE* ſeront auſſi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) équiangles, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *OB*· *BA* :: *KF*· *EF*; mais parce que les parallélogrames *BD* & *FH* ſont ſemblables, (*Déf.* 20.) *BA*· *BC* :: *EF*· *FG*; & nous venons de démontrer que *OC*· *BR* :: *OB*· *BC*, & *KG*· *FN* : : *KF*· *FG*. Donc *OC*· *BR* :: *KG*. *FN*, & (*Regl.* 2. *des proportions*, *alternando*) *OC*· *KG* : : *BR*· *FN*; mais (*Th.* 27.) *OC* = *BD* & *KG* = *FH*. Donc *BD*· *FH* : : *BR*· *FN*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Puiſque les triangles ſemblables *BAC* & *FEG* ſont (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les moitiés des parallélogrames ſemblables *ABCD* & *EFGH*, qui ont les mêmes baſes & hauteurs que ces triangles, ils ſont entre eux comme les parallélogrames, & par conſéquent comme les quarrés des côtés homologues. Ce qu'il eſt inutile de démontrer.

THEOREME XXXI.

Tab. 9. Fig. 4. 5. & 6. & Fig. 1. Tab. 10.

Si on méne d'un angle quelconque, par exemple, de l'angle *A* du triangle rectiligne *BAC*, deux lignes ſur le côté *BC* prolongé autant qu'il eſt néceſſaire, comme les lignes *AD*, *AE*, qui faſſent avec la baſe *BC*, des angles *ADC* & *AEB*, chacun ſemblable au même angle *BAC*, je dis:

Premiérement, que le quarré du côté *BC* eſt plus petit que les quarrés des deux autres côtés *AB* & *AC* de tout le rectangle formé de *DE* muliplié par *BC*, ſi l'angle *BAC* eſt un angle aigu, comme dans la figure 4. & 5. de la table 9.

Secondement, ce même quarré du côté *BC* eſt plus grand que les quarrés des autres côtés de tout le rectangle de

de *DE* ſous *BC* ſi l'angle *BAC* eſt un angle obtus, comme dans la figure 6. de la table 9.

Troiſiémement, enfin le quarré du côté *BC* eſt égal aux deux quarrés des deux autres côtés pris enſemble, ſi l'angle *BAC* eſt un angle droit, comme dans la premiére figure de la table 10.

DEMONSTRATION.

Tab. 9. Fig. 4. 5. 6. & Tab. 10. Fig. 1.

Puiſque par l'hypothéſe, l'angle $ADC = BAC$, & que l'angle *ACD* eſt commun aux deux triangles *DAC* & *ACB*, ces triangles (*Cor.* 4. *Th.* 21. *&* *Cor.* 1. *Th.* 24.) ſont ſemblables & $DC \cdot AC :: AC \cdot CB$. Donc (*Cor. Lem.* 1.) $AC \times AC = DC \times BC$. De même, puiſque par l'hypothéſe, l'angle $AEB = BAC$, & que l'angle *ABC* eſt commun aux deux triangles *EBA* & *ABC*, ces deux triangles (*Cor.* 4. *Th.* 21. *&* *Cor.* 1. *Th.* 29.) ſont auſſi ſemblables, & par conſéquent $EB \cdot AB :: AB \cdot BC$, & $AB \times AB =$ (*Cor.* 1. *Lem.* 1.) $EB \times BC$.

Si on décrit deux parallélogrames rectangles *CO* & *BK*, ſur les côtés *DC* & *BE*, & que leur hauteur commune *EK* ſoit égale à *BC*. Il eſt conſtant (*Déf.* 12.) que *BG* eſt le quarré du côté *BC*, & ainſi les deux parallélogrames *CO* & *BK* faits de *DC* & *EB* multipliés par *BC*,

Premiérement, ſurpaſſent le quarré du côté *BC*, de tout le rectangle *DK*, dans la figure 4. & 5. de la table 9. dans leſquelles l'angle *BAC* eſt aigu.

Secondement, les deux mêmes parallélogrames *CO* & *BK*, ſont ſurpaſſés par le quarré du côté *BC*, de tout le rectangle *DK*, dans la figure 6. de la table 9. où l'angle *BAC* eſt obtus.

Troiſiémement, ces deux mêmes parallélogrames pris enſemble, ſont égaux au quarré du côté *BC*, dans la premiére figure de la table 10. où l'angle *BCA* eſt un angle droit.

Donc premiérement, $AC \times AC$, &, $AB \times AB$; ou bien les deux quarrés de *AC* & *AB*, ſurpaſſent le quarré du côté *BC*, de tout le rectangle *DK* dans les figures 4. &

5. de la table 9. dans lesquelles l'angle *BAC* est aigu. Secondement, les deux quarrés de *BA* & *AC* sont surpassés par le quarré de *BC* de tout le rectangle *DK* dans la figure 6. de la table 9. où l'angle *BAC* est obtus. Troisiémement, les deux quarrés de *BA* & *AC* pris ensemble, sont égaux au quarré de *BC*, dans la premiere figure de la table 10. où l'angle *BAC* est un angle droit. Donc (ce qui est la même chose.) 1°. Le quarré du côté *BC*, est plus petit dans les figures 4. & 5. de la table 9. que les quarrés des deux autres côtés *AC* & *AB* pris ensemble, de tout le rectangle *DK* fait de *DE* multiplié par *BC*. 2°. Le même quarré du côté *BC* du triangle *ABC*, est plus grand & surpasse les quarrés des deux autres côtés *AC* & *BA*, de tout le rectangle *DK* dans la figure 6 de la table 9. 3°. Enfin le quarré du côté *BC* est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés *BA* & *AC* du triangle *BAC*, dans la premiere figure de la table 10. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Si l'angle *BAC* est égal à chacun des angles *ABC* & *ACB*, & qu'ainsi le triangle *BAC* soit équilateral, il est évident que le quarré du côté *BC*, sera égal à chacun des quarrés des deux autres côtés *AB* & *AC*, & par conséquent, que la somme de ces quarrés, surpassera le quarré du côté *BC*, de toute sa valeur; c'est-à-dire, que la somme de ces quarrés, sera le double du quarré du côté de *BC*. Ce qui suit nécessairement de ce qui vient d'être démontré.

LEMME II.

Si plusieurs grandeurs sont en même rapport; par exemple, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; c'est-à-dire, si $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$, &c. la somme des antécédens $A + C + E$ est à la somme des conséquens $B + D + F$, comme le premier antécédent *A* est au premier conséquent *B*.

DEMONSTRATION.

Puiſque par l'hypothéſe, $A \cdot B :: C \cdot D$: (*Régle 2. prop. alternando*) $A \cdot C :: B \cdot D$, & (*Régle 3. componendo*) $A + C \cdot C :: B + D \cdot D$, (*Régle 2. alternando*) $A + C \cdot B + D :: C \cdot D$; mais, par l'hypothéſe, $C \cdot D :: E \cdot F$. Donc, $A + C \cdot B + D :: E \cdot F$, & (*Régle 2. alternando*) $A + C \cdot E :: B + D \cdot F$, & (*Régle 3. componendo*) $A + C + E \cdot E :: B + D + F \cdot F$, & (*Régl. 2. alternando.*) $A + C + E \cdot B + D + F :: E \cdot F$ (*L'hypothéſe*) $:: A \cdot B$. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 10. Fig. 2. & 3.

THEOREME XXXII.

Les contours des figures ſemblables, ſont comme les côtés homologues.

DEMONSTRATION.

Si les deux figures *ABCDE* & *FGHKL* ſont ſemblables, je dis que les contours de ces figures, ſont comme les côtés homologues *AB*, & *FG* ; car puiſque (*L'hyp.*) ces figures ſont ſemblables (*Déf. 20.*) $AB \cdot BC :: FG \cdot GH$, & (*Rég. 2. alternando*) $AB \cdot FG :: BC \cdot GH$. On peut de même démontrer que $BC \cdot GH :: CD \cdot HK$, & $CD \cdot HK :: DE \cdot KL$ (& $DE \cdot KL :: EA \cdot LF$. Donc, (*Lem. 2.*) la ſomme des antécédens $AB + BC + CD + DE + EA$ eſt à la ſomme des conſéquens $FG + GH + HK + KL + LF :: AB \cdot FG$; c'eſt-à-dire, que le contour de la figure *ABCDE*, eſt au contour de la figure *FGHKL*, comme le côté *AB* eſt au côté *FG*. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 10. Fig. 4. & 5.

LEMME III.

Si des angles égaux *A* & *F* des figures ſemblables *ABCDE* & *FGHKL*, on méne des lignes droites, *AC*, *AD*, *FH* & *FK*, aux angles *C*, *D*, *H*, *K* par leſquelles ces figures ſoient diviſées en autant de triangles qu'il y a de côtés, exceptés deux ; je dis que les triangles d'une de ces figures ſont chacuns ſemblables aux triangles de l'autre figure, auſquels ils répondent.

DEMONSTRATION.

Puiſque ces deux figures ſont ſemblables (*Déf.* 20.) *AB. BC* :: *FG. GH*, & l'angle *ABC* = à l'angle *FGH*. Donc (*Cor.* 2. *Th.* 29.) ces deux triangles, *ABC* & *FGH* ſont ſemblables, & *AB. BC* :: *FG. GH*, & l'angle *ACB* = à l'angle *FHG*; mais parce que ces deux poligones ſont ſemblables, *BC* (*Déf.* 20.) + *CD* :: *GH. HK*, & (*Ax.* 5.) l'angle *ACD* = *FHK*, & ainſi (*Cor.* 2. *Th.* 29.) les triangles *ACD* & *FHK* ſont auſſi ſemblables.

On peut démontrer de la même maniére, que les triangles *ADE* & *FKL* ſont ſemblables. Donc ces deux poligones ſont diviſés en autant de triangles, l'un que l'autre, & chacuns de ces triangles, ſont ſemblables aux triangles de l'autre figure, auſquels ils répondent.

Tab. 10. Fig. 4. & 5.

THEOREME XXXIII.

Les aires des figures ou poligones ſemblables, ſont comme les quarrés des côtés homologues.

DEMONSTRATION.

Les poligones ſemblables, *ABCDE* & *FGHKL* (*Lem.* 3.) diviſés en triangle, de maniére que les triangles *ABC* & *FGH*; *ACD* & *FHK*; *ADE* & *FKL* ſoient ſemblables, (*Cor. Th.* 30.) ſont entre eux comme les quarrés des côtés homologues, & par conſéquent les triangles *ABC* & *FGH*, *ACD* & *FHK*, ſont entre eux, comme les quarrés des côtés *AC* & *FH*; c'eſt-à-dire, en même raiſon. De même les triangles *ACD* & *FHK*, *ADE* & *FKL*, ſont entre eux, comme les quarrés des côtés *AD* & *FK*, & en même raiſon. Donc le triangle *ABC* eſt au triangle *FGH*, comme *ACD* eſt à *FHK*, comme *ADE* eſt à *FKL*. Donc (*Lem.* 2.) la ſomme des antécédens; c'eſt-à-dire, des triangles dont l'aire de la figure *ABCDE* eſt compoſée, eſt à la ſomme des conſéquens dont la figure *FGHKL* eſt compoſée, comme le triangle *ABC* eſt au triangle *FGH*, & (*Cor Th.* 30.) le triangle *ABC* eſt au

triangle *FGH*, auquel il eſt ſemblable, comme le quarré du côté *AB* au quarré du côté homologue *FG*. Donc les aires des poligones ſemblables *ABCDE* & *FGHKL*, ſont auſſi entre elles, comme les quarrés des côtés homologues *AB* & *FG*. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME. IV.

Tab. 9. Fig. 61

L'angle *BAC* formé par les deux lignes *AB* & *AC* tangentes du cercle, eſt diviſé en deux parties égales, par la ligne droite tirée du point *A* dans lequel concourent ces deux lignes, au point *E* qui eſt le centre du cercle.

DEMONSTRATION.

Si on tire du centre *E* aux points *C* & *B* dans leſquels les lignes *AB* & *AC* touchent le cercle, deux rayons *EB* & *EC*, les angles en *C* & *B* (*Cor.* 4. *Th.* 11.) ſont des angles droits, & ainſi (*Part.* 3. *Th.* 31.) les quarrés des deux côtés *AB* & *BE* ſeront enſemble, égaux au quarré de *AE*, de même que les quarrés des côtés *AC* & *CE* pris enſemble, ſont égaux au même quarré du côté *AE*. Donc les quarrés des côtés *AB* & *BE* ſont enſemble, égaux aux quarrés des côtés *AC* & *CE* pris enſemble, & en ôtant de part & d'autre les quarrés égaux des rayons *EB* & *EC*, il reſtera les quarrés égaux des côtés *AB* & *AC*; & ainſi les tangentes *AB* & *AC* ſeront égales entre elles, & les triangles *ABE* & *ACE* ſeront équilatéraux, & par conſéquent auſſi, (*Cor.* 3. *Th.* 24.) équiangles, & les angles *EAB*, & *EAC* ſeront égaux entre eux. Ce qu'il falloit démontrer.

DEFINITION XXI.

On appelle une figure *circonſcrite* à un cercle, lorſque tous ſes côtés touchent le cercle; on l'appelle *inſcrite*, lorſque la circonférence du cercle paſſe par tous ſes angles.

THEOREME XXXIV.

Les contours des figures ſemblables *ABCDE* & *FG*

HKL circonſcrites à des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles.

Tab. 11. Fig. 1. & 2.

DEMONSTRATION.

Si on joint les centres *M*, *N*, avec les extrémités des côtés homologues *AB*, *FG*, & avec les points *P* & *Q* où les côtés homologues touchent les cercles; les angles *ABM* & *FGN* ſeront (*Lem.* 4.) la moitié des angles *ABC* & *FGH* qui ſont (*Déf.* 20.) égaux, & par conſéquent les angles *ABM* & *FGN* ſont auſſi égaux entre eux. On peut de même démontrer que les angles *BAM* & *GFN* ſont égaux entre eux. Donc (*Cor.* 4. *Th.* 21.) les triangles *ABM* & *FGN* ſont équiangles, & ainſi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AB*· *BM* :: *FG*· *GN*. Puiſque *AB* & *FG* ſont des tangentes, les angles en *P*, *Q* (*Cor.* 4. *Th.* 7. ſont des angles droits, & par conſéquent égaux entre eux; mais on a déja démontré que les angles *PBM* & *QGN* ſont égaux entre eux. Donc *Cor.* 4. *Th.* 21.) ces triangles *BPM* & *GQN* ſont équiangles, & (*Cor. Th.* 29.) *BM*· *PM* :: *GN*. *QN*. Donc (*Rég.* 6. *ex propor. ordinata*) *AB*· *PM* :: *FG*· *QN*, & (*Rég.* 2. *alternando*) *AB*· *FG* :: *PM*· *QN*. Mais nous avons démontré par le Théorême 32. que les contours des figures ſemblables *ABCDE*, *FGHKL*, ſont comme les côtés homologues *AB* & *FG*. Donc les contours des mêmes figures ſont comme les rayons *PN* & *QN*, & par conſéquent comme les diamétres des cercles auſquels elles ſont circonſcrites. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 11. Fig. 3, & 4.

THEOREME XXXV.

Les figures ſemblables *ABCDE* & *FGHKL* inſcrites dans des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles.

DEMONSTRATION.

Si on joint les centres *M*, *N*, avec les extrémités des côtés homologues *AB*, *FG*, & qu'on tire les lignes *AC* & *FH*, les triangles *ABC*, *FGH* ſeront (*Lem.* 3.) ſembla-

bles, & les angles *ACB* & *FHG* qui ſont à la circonférence des cercles, ſeront égaux entre eux. Donc les angles *AMB FNG* qui ſont aux centres des cercles, ſont (*Cor. 5. Th.* 18.) égaux entre eux. Mais tous les rayons d'un cercle étant égaux, *AM. BM :: FN. NG.* Donc (*Cor. 2. Th. 29.*) les triangles *AMB*, *FNG* ſont auſſi ſemblables, & ainſi (*Déf.* 20.) *AB. AM :: FG. FN*, & (*Rég. 2. alternando.*) *AB. FG :: AM. FN.* Mais il a été démontré que les contours des poligones ſemblables *ABCDE*, *FGHKL*, ſont comme les côtés homologues *AB*, *FG.* Donc les contours des mêmes figures, ſont comme les rayons *AM*, *FN*, & par conſéquent comme les diamétres des cercles dans leſquels elles ſont inſcrites. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 11. Fig. 4.

THEOREME XXXVI.

Les aires des figures ſemblables inſcrites, ou circonſcrites à des cercles, ſont comme les quarrés des diamétres de ces cercles.

DEMONSTRATION.

Les côtés homologues des figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont (*Th.* 33, 34, 35.) comme les diamétres de ces cercles. Donc dans ces figures ſemblables, les quarrés des côtés homologues, ſont comme les quarrés des diamétres. Mais (*Th.* 33.) les aires de tous les poligones ſemblables, ſont comme les quarrés des côtés homologues. Donc les aires de ces mêmes figures inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont comme les quarrés des diamétres de ces cercles. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 10. Fig. 4.

THEOREME XXXVII.

Les contours des cercles, ſont comme les diamétres, & les aires comme les quarrés des diamétres.

DEMONSTRATION.

Si on circonſcrit un poligone à un cercle, & qu'on

inſcrive un autre ſemblable poligone dans ce même cercle, & que ces poligones deviennent d'une infinité de côtés, ils ſeront enfin réduits à un ſeul, & ainſi le cercle compris entre ces poligones, ſera plus grand que le poligone inſcrit & plus petit que le circonſcrit, juſqu'à ce qu'il ſoit confondu avec ces poligones, & que les contours & les aires de ces poligones deviennent les mêmes, que le contour & l'aire du cercle. Donc les contours & les aires des cercles, ſont comme les contours & les aires des poligones d'une infinité de côtés, circonſcrits ou inſcrits à ces cercles. Mais il a été démontré que les contours des poligones étoient comme les diamétres des cercles auſquels ils ſont circonſcrits ou inſcrits, & que leurs aires ſont comme les quarrés de ces diamétres. Donc les contours des cercles ſont comme les diamétres, & leurs aires ſont comme les quarrés des diamétres. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette démonſtration, que le cercle peut être auſſi bien que toutes les autres lignes courbes, regardé comme un poligone d'une infinité de côtés.

THEOREME XXXVIII.

L'aire du cercle eſt égale au produit de la circonférence, par la moitié du rayon.

Tab. 11. Fig. 52

DEMONSTRATION.

On peut (*Cor. Th.* 37.) conſiderer le cercle *ADF*, comme un poligone d'une infinité de côtés. Suppoſons qu'un des côtés de ce poligone eſt *DE*; ſi on méne du centre *C*, les rayons *CE* & *CD*, ils formeront avec le côté *DE*, un triangle infiniment petit, dont la hauteur ſera le rayon du cercle, & ainſi (*Scolie Th.* 27.) ce triangle ſera égal au produit de la moitié du rayon par le côté nfiniment petit *DE*. On peut dire la même choſe des autres triangles dont l'aire du cercle *ADF* eſt compoſée. Donc l'aire du cercle eſt égale à la ſomme des produits du même demi-rayon

par

par tous les côtés infiniment petits dont eſt compoſée la circonférence du cercle *ADF*, ou bien, au produit de la circonférence, par le demi rayon. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si on ſuppoſe que la tangente du cercle dans le point *D*, eſt continuée juſques en *B*, de ſorte que *BD* ſoit égale à la circonférence du cercle, & qu'on joigne les points *C* & *B* par la ligne droite *CB*; le triangle *CDB* dont la hauteur (*Cor. 4. & 5. Th.* 11.) eſt *CD*, ſera (*Scolie Th.* 27.) égal au produit de la baſe *BD*, par la moitié de la ligne *DC*; c'eſt-à-dire, au produit de la circonférence du cercle par le demi rayon. Donc, puiſque l'aire du cercle, eſt égale à ce même produit, elle eſt auſſi égale au triangle dont la hauteur eſt le rayon du cercle, & la baſe égale à la circonférence du cercle.

COROLLAIRE II.

On peut démontrer par la même raiſon, qu'un ſegment de cercle, par exemple *DCF*, eſt égal au produit de l'arc *DF*, par le demi rayon, ou bien au triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe égale à l'arc *DF*.

SCOLIE.

Il ſuit de là, qu'on trouveroit facilement une figure rectiligne égale au cercle, ſi on pouvoit avoir une ligne droite, qui fut égale à la circonférence du cercle; c'eſt ce que les Géométres n'ont point encore trouvé, ils en approchent infiniment, mais ils ne ſont point encore parvenus à découvrir une ligne moyenne proportionnelle, entre le demi rayon & la circonférence du cercle; le quarré de cette moyenne proportionnelle, ſeroit la quadrature du cercle tant ſouhaittée; car la quadrature du cercle, n'eſt autre choſe que l'aire du cercle réduite en quarré.

THEOREME XXXIX.

Si on méne deux lignes droites *AC* & *AD*, du même point quelconque, par exemple, du point *A*, & qu'elles

rencontrent la circonférence du cercle dans les points *B*,*C*, *D*, *E*; je dis que *AC*· *AD* :: *AE*· *AB*.

DEMONSTRATION.

Tab. 11. Fig. 6. 7. & 8.

Si on méne les lignes *DB* & *CE*, les triangles *CAE* & *DAB* ſont (*Cor.* 1. *Th.* 29.) ſemblables, parce que l'angle *ACE* (*Cor* 2. *Th.* 18.) = *ABD*, & l'angle *CAE* (*Th.* 19.) = *DAB*, & par conſéquent (*Cor* 4. *Th.* 21.) *CEA* = *ABD*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) ces triangles ſeront ſemblables, & *AC*· *AD* :: *AE*· *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc (*Lem.* 1.) le rectangle des parties *AC* & *AB* de la même ſécante *AC*, eſt égal au rectangle des parties *AD* & *AE* de l'autre *AD*.

COROLLAIRE II.

Puiſque dans la figure 8. de la table onziéme, les points *C* & *B* de la tangente *AC*, ſont confondus en un point, qui eſt celui où la tangente touche le cercle; les lignes *AC* & *AB* ne ſont qu'une même ligne. Donc la tangente *AC* eſt moyenne proportionnelle entre toute la ligne *AD* & la partie *AE*, & le rectangle de *AC* & *AB*, dans ce cas, eſt égal au quarré de la tangente *AC*; & ainſi il eſt clair, que ſi du même point *A*, on méne la tangente *AC*, & la ſécante *AD*, le rectangle de toute la ſécante *AD* & de ſa partie *AE*, eſt égal au quarré de la tangente *AC*.

COROLLAIRE. III.

Si du même point *A*, on méne une autre tangente *AF*; les quarrés des tangentes *AC* & *AF* ſeront égaux, & ces tangentes ſeront égales.

AVERTISSEMENT.

De ce que nous avons dit dans ce chapitre des lignes droites, auſſi bien que des figures compriſes entre ces lignes;

il eſt aiſé de voir comment on peut meſurer ces mêmes figures par le moyen de la Trigonométrie, dont nous allons parler dans le chapitre ſuivant, qui ne comprend que trois Théorêmes, dans leſquels eſt renfermé l'art de meſurer toutes ſortes de longueurs, largeurs, &c.

CHAPITRE SECOND.

De la Trigonométrie rectiligne.

LA Trigonométrie enſeigne à meſurer toutes ſortes de triangles; le triangle eſt compoſé de trois côtés, & de trois angles. Si de ces ſix choſes on en connoît trois, pourvû qu'il y ait un côté entre ces trois choſes connuës, on trouve les trois autres par *la régle de trois*, qu'on nomme ordinairement *la régle d'or*. Il faut donc que ces parties ſoient proportionnelles, & qu'on en connoiſſe les proportions; mais parce qu'on ne ſauroit les connoître ſans réduire en lignes droites ce qu'il y a de circulaire dans les triangles, (comme la meſure des angles) c'eſt pour cela que les Mathématiciens déterminent la grandeur que les lignes droites appliquées au cercle, ont par rapport au diamétre, qui ſert à connoître la valeur des lignes droites, dont on ſe ſert pour meſurer les triangles. Il y en a de trois ſortes; ſavoir, les ſinus, les ſécantes & les tangentes.

DEFINITION XXII.

Tab. 11. Fig. 9.

La ligne perpendiculaire *AE*, qui tombe de l'extrémité de l'arc *AB*, ſur le rayon *CB*, eſt appellée, *le ſinus* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*, dont cet arc (*Th.* 16.) eſt la meſure. La ligne *CD*, qui n'eſt que la ligne *AC* prolongée juſques à la tangente, ſe nomme la ſécante du même angle, ou du même arc, & *BD* continuée juſques à la ſécante, eſt appellée *tangente*.

COROLLAIRE.

La ligne *AE* (*Th.* 12.) eſt égale à la moitié de la corde *AG*, & ainſi les arcs *AB* & *BG*, ſont égaux. Donc le *ſinus AE* de l'arc *AB*, eſt la moitié de la corde du double de ce même arc.

DEFINITION XXIII.

Par la même raiſon que *AE* eſt le *ſinus* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*; *FC* eſt le *ſinus* du quart de la circonférence du cercle *FB*, ou de l'angle droit *FCB*. Mais parce que le plus grand de tous les ſinus, eſt ſuppoſé diviſé en pluſieurs parties égales, dont les autres ſinus contiennent un nombre déterminé, le ſinus *FC* eſt appellé *ſinus total*, dont les autres ſont des parties, & on les nomme ſimplement, *ſinus*.

COROLLAIRE I.

Lors donc qu'on cherche le ſinus d'un angle, ou d'un arc égal à cet angle, on cherche ſeulement combien la moitié de la corde du double de cet arc, contient de parties du *ſinus total* ou du rayon qui convient à cet arc.

COROLLAIRE II.

Le *ſinus total* eſt comme l'échelle par le moyen de laquelle on connoît les autres ſinus. L'on doit donc chercher le rapport des différens ſinus, par celui qu'ils ont avec le ſinus total; car de différentes meſures on ne peut rien conclure.

DEFINITION XXIV.

Le reſte *EB* du rayon *CB*, compris entre l'arc *AB* & ſon ſinus *AE*, eſt appellé *ſinus renverſé* du même arc *AB* ou de l'angle *ACB*, & dans ce cas *AE* eſt appellé le ſinus droit, de peur qu'on le confonde avec l'autre.

SCOLIE.

Pour trouver facilement la valeur des ſinus, tangentes

& ſécantes, les Mathématiciens après avoir diviſé le ſinus total en pluſieurs parties égales, ont cherché par de grands calculs & très-ſubtils, combien chaque ſinus contient de ces parties; ils ont de même cherché combien de ces parties du rayon ou ſinus total, ſont contenuës dans les tangentes & ſécantes de tous les degrés & minutes du quart de cercle : car les tangentes & ſécantes, de même que les ſinus, ont un certain rapport déterminé avec le ſinus total.

Le nombre des parties du ſinus total, qui convient aux ſinus, tangentes & ſécantes, eſt diſtribué en trois tables; l'une eſt celle des ſinus, la ſuivante celle des tangentes, & la troiſiéme celle des ſécantes dont on ſe ſert de la maniére ſuivante.

Un angle étant donné, ou bien l'arc qui en eſt la meſure, par exemple de 40 degrés cinquante minutes. Cherchez les degrés donnés, au haut de la table, comme l'on cherche les mots dans un Dictionnaire; enſuite les minutes que vous trouverez dans la premiere colonne à gauche, & par le moyen des tables, vous connoîtrez le ſinus, la tangente & ſécante de quarante degrés cinquante minutes.

Si vous ne connoiſſez que le ſinus de l'angle ou de l'arc, & que vous vouliez ſavoir de combien de degrés & minutes, eſt l'angle dont vous connoiſſés le ſinus : Cherchez dans la colonne des ſinus, le nombre qui marque le ſinus que vous connoiſſez, ou bien, ſi vous ne le trouvez pas, prenez celui qui en aproche le plus, & vous trouverez dans la premiére colonne à gauche, les minutes, & au haut les degrés de l'angle, ou de l'arc donné.

Si vous voulez vous ſervir des logarithmes, qui ſont des nombres arithmétiquement proportionnels, qui répondent aux nombres géométriquement proportionnels, qui expriment les valeurs des ſinus, tangentes & ſécantes. Il faut ajoûter au logarithme du ſecond terme connu, le logarithme du troiſiéme, & de la ſomme de ces deux nombres ôter le logarithme du premier terme; ce qui reſtera ſera le logarithme du quatriéme terme que l'on cherche, qui par le moyen de la table, fera connoître l'angle ou l'arc qui lui

répond. Ce qui eſt beaucoup plus facile que de ſe ſervir des propres nombres des ſinus, tangentes & ſécantes, parce qu'en ſe ſervant des nombres des ſinus, tangentes & ſécantes, il faut multiplier le ſecond terme par le troiſiéme, & diviſer le produit par le premier, & au lieu de l'addition & de la ſouſtraction, ſe ſervir de la multiplication & de la diviſion ; ainſi l'opération eſt bien plus facile par le moyen des logarethmes.

THEOREME XL.

Les côtés d'un triangle rectiligne, ſont entre eux, comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés.

DEMONSTRATION.

Fig. 10. Tab. 11. & Fig 1. & 2. Tab. 12.

Le côté *AB* du triangle *ABC*, eſt au côté *BC*, comme le ſinus de l'angle *C* oppoſé au côté *AB*, eſt au ſinus de l'angle *A* oppoſé au côté *BC* ; car ſi (*Cor.* 8. *Def.* 6.) on décrit un cercle qui paſſe par les angles de ce triangle, & qu'on diviſe les côtés *AB* & *BC*, par la moitié en *F* & en *H* ; qu'on tire du centre *E* les lignes *EF EH* : les angles ſeront (*Th.* 12.) droits en *F* & *H*. Donc (*Déf.* 22.) *BF* eſt le ſinus de l'angle *BEF*, & *AF* le ſinus de l'angle *AEF*, & le ſinus total eſt *BE*. Puiſque les angles *AEF* & *BEF*, ſont (*Th.* 13 & 16.) égaux entre eux, ils ſont auſſi (*Cor.* 5. *Th.* 18.) égaux à l'angle *C*. Donc le rayon *BE* étant le ſinus total, *FB* eſt le ſinus de l'angle *C*. On peut de même démontrer que *HB* eſt le ſinus de l'angle *BAC*, & par conſéquent *FB*, étant par l'hypothéſe, la moitié du côté *AB*, & *HB* la moitié de *BC*, & (*Ax.* 9.) un tout eſt à un autre tout, comme la moitié de l'un, eſt à la moitié de l'autre, *AB*. *BC* :: *FB* ſinus de l'angle *C*. *HB* ſinus de l'angle *BAC*, & ainſi des autres côtés & ſinus des angles oppoſés. Donc ces côtés ſont entre eux comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce théorême eſt le fondement de la ſolution de tous les triangles rectilignes, lorſque deux angles & un côté, ou

bien deux côtés & un angle étant donnés, on cherche le reſte.

THEOREME XLI.

Tab. 11. Fig. 3.

Dans un triangle rectiligne, le plus grand côté eſt à la ſomme des deux autres, comme leur différence eſt à la différence des parties du plus grand côté diviſé par la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé.

DEMONSTRATION.

Dans le triangle *ABC* dont le plus grand côté eſt *AC*, ſur lequel tombe la perpendiculaire *BD*, qui le diviſe en deux parties, dont la plus grande eſt *AD*, & la plus petite *DC*; *AC* eſt à la ſomme des deux autres côtés *AB* & *BC*, comme leur différence eſt à la différence des parties *AD* & *DC*: Car ſi du centre *B* on décrit un cercle dont *BC* ſoit le rayon, & qu'on prolonge la ligne *AB* juſques au point *H* de la circonférence du cercle; *AH* ſera la ſomme des côtés *AB* & *BC*, puiſque (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) *BC* = *BH*, & par conſéquent *AF* ſera la différence des côtés *AB* & *BC* *BD*, par l'hypothéſe, eſt perpendiculaire à la ligne *EC*. *ED* (*Th.* 12.) eſt donc = *DC*, & *AE* eſt la différence des parties *AD* & *DC* du plus grand côté *AC*. Mais *AC*. *AH* (*Th.* 39.) :: *AF*. *AE*. Donc le plus grand côté *AC* eſt à la ſomme des deux autres *AB* & *BC*, comme leur différence *AF*, eſt à la différence *AE* des parties *AD* & *DC* du plus grand côté diviſé par la perpendiculaire *BD* menée de l'angle oppoſé. Ce qu'il falloit démontrer.

Par ce théorême on trouve les angles d'un triangle dont on connoît les côtés; on peut auſſi trouver la perpendiculaire tirée d'un angle quelconque au côté auquel il eſt oppoſé.

LEMME V.

La plus grande de deux grandeurs inégales, eſt égale à la moitié de leur ſomme avec la moitié de leur différence;

Tab. 12. Fig. 4.

& la plus petite eſt égale à la moitié de leur ſouſomme, moins la moitié de leur différence.

DEMONSTRATION.

Si de deux grandeurs inégales, AB & BC, la plus grande eſt BC, & la plus petite AB, & qu'on diviſe AC par la moitié en O ; CO ſera $= AO = AB + BO$, & par conſéquent $AC = 2\,AB + 2\,BO$. Donc $BC = AB + 2\,BO$. Mais BC, qui eſt la plus grande partie, eſt égale à la plus petite partie AB avec la différence dont BC ſurpaſſe AB. Donc la différence de ces deux grandeurs inégales AB & BC, eſt deux BO ; & ainſi BO eſt la moitié de leur différence. Mais CO ou bien AO eſt la moitié de la ſomme de ces grandeurs inégales. Donc la plus grande $BC = CO$ qui eſt la moitié de la ſomme, $+ BO$ qui eſt la moitié de la différence de ces deux grandeurs. La plus petite des deux, AB eſt auſſi $= AO$ qui eſt la moitié de la ſomme, $- BO$ qui eſt la moitié de la différence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLII.

Dans tous les triangles rectilignes, la ſomme de deux côtés, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles adjacens au troiſiéme côté, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

DEMONSTRATION.

La ſomme de deux côtés de tel triangle qu'on voudra, par exemple du triangle ABC, ſavoir AB & AC, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles ACB & ABC qui leur ſont oppoſés, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Car ſi on prolonge le côté CA juſques en D, de maniére que AD ſoit $= AB$, & qu'on joigne les points B & D par la ligne BD, ſur laquelle tombe la perpendiculaire AF avec la ligne AE paralléle à BC; AD étant par l'hypothéſe $= AB$; l'angle ADB (*Th.* 22.) ſera égal à l'angle.

ABD. Donc, puiſque par l'hypothéſe les angles *AFD*, & *AFB* ſont deux angles droits, *DAF* ſera (*Cor.* 4. *Th.* 21.) = *BAF*; & par conſéquent *DAB* étant (*Cor.* 5 *Th.* 21.) égal à la ſomme des angles *C* & *B*; *DAF* ſera = à la demi-ſomme de ces mêmes angles *C* & *B*. Mais *AE*, par l'hypothéſe, eſt paralléle à *BC*. Donc l'angle *DAE* (*Déf.* 5.) eſt égal à l'angle *C*, qui eſt le plus petit des deux angles adjacens à la baſe *BC* du triangle *ABC*. Donc le plus petit angle eſt égal à la moitié de la ſomme de ces mêmes angles, moins *EAF*. Donc (*Lem.* 5.) *EAF* eſt leur demi-différence.

Mais puiſque, par l'hypothéſe, *DF* perpendiculaire à la ligne *AF*, touche le cercle *FG* décrit du centre *A*, & qui a pour rayon *AF*, (*Déf.* 22.) *DF* ſera la tangente de la demi-ſomme des angles *C* & *B*; *EF* ſera auſſi la tangente de la demi-différence des mêmes angles. Si on méne la ligne *FH* paralléle à la ligne *EA* ou (*par l'hypothéſe*) à la ligne *CB*; (*Th.* 29. *& régle* 3. *des prop.*) *DH*. *AH* :: *DF*. *EF*. Donc *DH*. *AH* : : la tangente de la demi-ſomme des angles *C* & *B*, eſt à la tangente de la demi-différence des mêmes angles.

L'on vient de démontrer que les triangles *DAF*, & *BAF* ſont équiangles, de même que *DHF*, & *DCB*; ainſi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AD*. *AB* : : *DF*. *FB* : : *DH*. *HC*. Donc *DH* = *HC*, puiſque (*par l'hypothéſe*) *AD* = *AB*. Par conſéquent *DC* eſt la ſomme des côtés *AB* & *AC*, & (*par le Lem.* 5.) *AH* eſt la demi-différence des mêmes côtés. Mais (*Ax.* 9.) *DH* + *HC*, ou bien *DC*. *AH* + *AH* : : *DH*. *AH*. Donc la ſomme des côtés *AB* & *AC*, eſt à leur différence, comme *DH*. *AH*. Donc la ſomme des mêmes côtés *AB* & *AC*, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles *C* & *ABC*, eſt à la tangente de la demi-différence des mêmes angles. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE GENERAL.

Toute la trigonométrie rectiligne eſt renfermée dans ces trois derniers théorêmes, par le moyen deſquels on me-

ſure toutes ſortes de triangles & de figures rectilgnes, & par conſéquent toutes ſortes de grandeurs ; car où l'on connoît deux côtés & un angle oppoſé à l'un de ces côtés, ou bien deux angles & un côté, & pour lors on trouve le reſte par le théorême 40.

Si l'on connoît deux côtés & l'angle compris entre ces deux côtés, le reſte ſe trouve par le théorême 42.

Si enfin on connoît tous les côtés, l'on trouvera tous les angles par le théorême 41.

Tab. 12. Fig. 6. Remarquez que deux côtés *AC* & *AB* du triangle *ABC*, étant donnés avec l'angle *C* oppoſé au côté *AB* ; on ne peut ſûrement trouver l'angle oblique *ABC*, ſans ſavoir quelle eſt l'eſpéce de cet angle, s'il eſt aigu ou obtus, parce qu'en prenant *AB* pour le rayon du demi cercle *FAG*, le ſinus *AE* (*Th.* 40.) trouvé, ſera commun (*Déf.* 22.) à à l'angle obtus *ABC*, ou bien à l'arc *AF* & à l'angle aigu *ABE*, & à l'arc *AG*, & par conſéquent en prolongeant *CB* juſques en *D*, & en ſuppoſant que $DA = BA$, comme (*Th.* 22.) l'angle $ADB = ABD$, le ſinus de l'angle obtus *ABC*, ſera le même que celui de l'angle aigu *D*. Donc les deux côtés *AB* ou *AD* & *AC* étant donnés avec l'angle *C*, l'on trouvera le même ſinus pour l'angle obtus *ABC*, que pour l'angle aigu *D*, & par conſéquent on ne ſauroit par le moyen de ce ſinus, diſtinguer l'angle obtus *ABC* de l'angle aigu *D*, ni le triangle *CAB* du triangle *CAD* ; mais l'on peut ſeulement connoître que l'angle cherché eſt l'obtus *ABC*, ou l'aigu *D*. Donc les deux côtés *AC* & *AB* étant donnés, pour trouver le reſte, il faut connoître l'eſpéce de l'angle que l'on cherche *ABC*, & ſavoir s'il eſt aigu ou obtus.

Lorſqu'on connoît tous les côtés des triangles, on peut facilement trouver leurs baſes & leurs hauteurs, & par conſéquent leurs aires en multipliant (*Scolie Th.* 27.) la hauteur d'un triangle par la moitié de ſa baſe, ou ſa baſe par la moitié de ſa hauteur.

Voilà ce qui regarde la théorie élémentaire des lignes, & des ſurfaces ; il faut maintenant paſſer à la ſolidité des

corps; enſuite nous ferons voir dans la ſeconde partie de cette Géométrie, l'uſage de tout ce que nous aurons démontré dans la premiére.

LIVRE CINQUIEME.

Des corps ou des ſolides.

COMME toutes les figures rectilignes ſe réduiſent en triangles, de même tous les ſolides ſe réduiſent en pyramides; & comme l'on ne peut connoître les pyramides que par le moyen des parallélépipédes & des priſmes, nous ne parlerons dans ce chapitre que de ces trois choſes qui ſuffiſent pour trouver la ſolidité des corps.

DEFINITION XXV.

Si une figure pleine rectiligne, par exemple *ABF*, eſt muë de *A* en *C*, de maniére qu'elle ſoit toûjours paralléle à elle-même, elle décrira un ſolide *CB* contenu entre les deux figures *ECD* & *ABF* qui ſont ſemblables & égales, & entre autant de parallélogrames qu'il y a de côtés dans la figure *ABF*. Ce corps en général eſt appellé *priſme*. Il y a pluſieurs eſpéces de priſmes; car on lui donne différens noms ſelon ſes différentes baſes. On l'appelle parallélépipéde, ſi la figure par le mouvement de laquelle il eſt formé, eſt un parallélograme, & on le nomme cylindre lorſque cette figure eſt un cercle. Tab. 12. Fig. 8. Tab. 7. p.

Le priſme eſt appellé *rectangle* lorſque la ligne *AC*, comme dans la figure préſente, eſt perpendiculaire à la baſe, & *obliqu'angle* ou *ſcaléne*, lorſqu'elle eſt oblique. Fig. 9.

COROLLAIRE.

De la formation des *rectangles* ſoit priſmes, ſoit parallélépipédes, il ſuit que ces corps ſont produits par leur baſe répétée autant de fois qu'il y a de points dans leur hauteur,

& par conſéquent que ces ſolides ſont égaux au produit de leur baſe multipliée par leur hauteur.

DEFINITION XXVI.

Fig. 10. La pyramide eſt une figure ſolide, qui eſt terminée par une baſe rectiligne, & par autant de triangles qu'il y a de côtés dans la baſe, comme *RTSV*. La pointe de la pyramide eſt *V*, la baſe *RTS*; ſi cette baſe eſt compoſée de de tant de côtés qu'elle devienne enfin un cercle, l'on appelle cette pyramide un *cone*.

Tab. 12. Fig. 11.

THEOREME XLIII.

Tab. 13. Fig. 1.2. Deux priſmes ou parallélépipédes, ou enfin deux pyramides qui ont la même baſe & ſont entre les mêmes plans paralléles, ſont égales.

DEMONSTRATION.

Si deux priſmes *ABCDE* & *GCDEH*, ou deux pyramides *CDEA* & *CDEH*, ſont ſur la même baſe *CDE* & entre les mêmes plans paralléles *CDE* & *AH*, & qu'on les ſuppoſe coupées par des plans paralléles à la baſe, en des lames très-menuës; il eſt conſtant que dans les deux corps, les lames *PON* & *LMK* ſont égales. Car dans la premiére figure, les lignes *GH* & *CE* ſont paralléles & égales (*Def.* 25.) & *BC. QE :: GC. HE*, & (*Th.* 25.) elles ſont auſſi paralléles. Mais puiſque (*l'hyp.*) *POMK* & *CE* ſont les ſections des plans *BE* & *GE* faites par les plans *PN LK* & *CDE* qui ſont paralléles entre eux, les lignes *PO* & *MK* ſont auſſi (*Déf.* 10.) paralléles à la ligne *CE*. Donc (*Déf.* 12.) *PE* & *ME* ſont des parallélogrames, & ainſi (*Th.* 26.) *PO* = *CE* = *MK*.

De même dans la ſeconde figure, parce que les plans *PN LK* & *CDE* ſont (*l'hyp.*) paralléles, les ſections *PO* & *MK* ſont auſſi (*Cor. Déf.* 10.) paralléles à la ligne *CE*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *CE. PO :: CA. PA :: CH. HM :: CE. MK*. Et ainſi *CE* a le même rapport à *PO* & *MK*, & (*Cor. Déf.* 17.) *PO* = *MK*.

Par la même raiſon que *PO* & *MK* ſont dans les deux figures, égales entre elles, *NP* & *LM* ſont auſſi égales. Donc dans les deux figures, les triangles *PNO* & *MLK* ſont équilateraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux entre eux.

Ce que l'on dit des lames triangulaires *PNO* & *MLK*, doit auſſi s'entendre des autres. Donc puiſque le corps *CDEA* eſt compoſé d'autant de lames *PNO*, que le corps *CDEH* eſt compoſé de lames *MLK*, ces deux corps (*Ax.* 4.) ſont égaux entre eux.

Mais comme toutes les figures rectilignes ſe réduiſent en triangles; de même les priſmes & parallélépipédes ſe réduiſent en priſmes triangulaires & en pyramides triangulaires. Donc les pyramides qui ont la même baſe & la même hauteur ſont égales, de même que les priſmes & les parallélépipédes. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de ce qui vient d'être démontré, que les cylindres ou les cones qui ont la même baſe & la même hautur, ſont égaux; Car comme l'on peut regarder leurs baſes, qui ſont des cercles, comme des poligones d'une infinité de côtés, de même les cylindres, & les cones ne différent point des priſmes & pyramides d'une infinité de côtés.

COROLLAIRE II.

Comme le priſme *rectangle*, ſoit parallélépipéde, ſoit cylindre, ou autre, eſt égal, (*Cor. Déf.* 25.) au produit de la baſe par la hauteur; de même le priſme obliq'uangue qui a la même baſe, & qui eſt de la même hauteur que le rectangle, eſt auſſi égal à ce produit; & en général tout priſme eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

THEOREME XLIV.

Un priſme triangulaire eſt le triple d'une pyramide qui a la même baſe & la même hauteur. Tab. 13. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Si on divise un prisme triangulaire, par exemple le prisme *ACBDEF* en trois pyramides *EFDC*, *EACD*, & *ABCD*, par le moyen de deux plans *ECD* & *ACD*, je dis que ces trois pyramides sont égales entre elles. Car (*Th.* 43.) la pyramide *ABCD* est égale à la pyramide *EFDC*, parce que (*Déf.* 25.) elles ont leurs bases opposées égales, savoir *EDF* & *ABC*, & la même hauteur. La pyramide *ECFD* est par la même raison égale à la pyramide *EACD*, parce que (*Cor.* 3. *Th.* 25. leurs bases *ECF* & *ECA* sont égales, & elles ont la même hauteur. Donc ces trois pyramides sont egales entre elles, & par conséquent chacune de ces pyramides est le tiers du prisme proposé. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Tab. 13. Fig. 4. Une pyramide est donc le tiers d'un prisme qui a la même base & la même hauteur, ou bien un prisme est le triple d'une pyramide qui a la même base & la même hauteur que ce prisme. Car si on réduit le prisme poligone *ABCDEGHIKF* en prismes triangulaires *ABC*, *IGH*; *CAD*, *IGK*; *DAE* & *FGK*; & la pyramide *ABCDEH* en pyramides triangulaires *ABCH*, *ACDH*, *ADEH*, chaque prisme (*Th. présent*) sera le triple de la pyramide qui a la même base & la même hauteur, & par conséquent le prisme total *ABCDEGHIKF* sera le triple de la pyramide totale *ABCDEH* qui a la même base & qui est de la même hauteur que le prisme total.

COROLLAIRE II.

Puisque (*Cor.* 1. *Th.* 43.) l'on peut regarder les cones comme des pyramides d'une infinité de côtés, & les cylindres comme des prismes d'une infinité de côtés; les cylindres sont triples des cones de la même base & hauteur.

COROLLAIRE III.

Comme tout prisme est égal (*Cor.* 2. *Th.* 43.) au produit de sa base par sa hauteur, il suit de-là que toute pyramide, & tout cone est égal au produit de sa base par la troisiéme partie de sa hauteur, ou de sa hauteur par la troisiéme partie de sa base.

THEOREME XLV.

En général les prismes, parallélépipédes, cylindres, pyramides, cones, sont entre eux comme les produits des hauteurs par les bases.

DEMONSTRATION.

Tous les prismes, parallélépipédes, cylindres, sont (*Cor.* 2. *Th.* 43.) égaux au produit de la base par la hauteur; les pyramides & les cones (*Cor.* 3. 44.) au tiers de ce produit. Donc (*Ax.* 9.) tous ces corps sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLVI.

La sphére est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit. Tab. 13. Fig. 5.

DEMONSTRATION.

Si l'on fait tourner le quarré *ACDE*, avec la diagonale *EC* & le quart du cercle *ABD* dont le centre est *C*, autour du côté *DC*: Premiérement ce quarré décrira par son mouvement un cylindre; secondement le quart de cercle décrira un hémisphére. Troisiémement le triangle *ECD* décrira un cone.

Cela posé, je dis premiérement que l'excès du cylindre sur l'hémisphére est égal au cone. Car si on suppose que ces solides sont coupés par un nombre indéfini de plans paralléles à la base *AC*, tels que *FG*: puisque (*Th.* 37.) les aires des cercles sont comme les quarrés des dia-

métres, ou des rayons; le cercle qui a pour rayon *BC*, ſera aux cercles dont *BG* & *GC* ſont rayons, comme le quarré de *BC* aux quarrés de *BG* & *GC*. Mais parce que l'angle *G* (*l'hyp.*) eſt droit, le quarré de *BC* eſt égal (*Part. 3. Th. 31.*) aux quarrés de *BG* & *GC* pris enſemble. Donc le cercle qui a *BC* pour rayon, eſt égal aux deux cercles, dont *BG* & *CG* ſont les rayons; mais comme (*Cor. 1. Th. 29.*) *GC. GH :: CD. DE*, & que (*l'hyp.*) *CD = DE*; *GC* ſera auſſi = *GH*, & le cercle qui a pour rayon *GC* = au cercle dont *GH* eſt le rayon. Donc le cercle dont *BC* eſt le rayon ou *FG*, ſera égal aux deux cercles pris enſemble, qui ont *BG* & *GH* pour rayons. Mais le même cercle qui a *FG* pour rayon, eſt égal au cercle dont *BG* eſt rayon, & à la couronne formée par la révolution de la ligne droite *FB* autour de *CD*. Donc (*Ax. 5.*) en ôtant de chaque côté le cercle qui a *BG* pour rayon, cette couronne qui reſtera ſera égale au cercle dont *HG* eſt le rayon, & de même par tout à cauſe de la hauteur indéterminée de la ſection *FG*. Donc la ſomme des couronnes décrites autour de *CD* par tou es les lignes *FB*, dont le triangle mixte *DBAE* eſt formé par la révolution de la figure *ACDE*, autour de *CD*, ſera égale à la ſomme des cercles décrits par cette révolution, & qui ont *HG* pour rayons. Mais la ſomme de ces couronnes eſt l'excès du cylindre produit par la révolution du quarré *AEDC*, ſur l'hémiſphére auſſi produit par la révolution du quart de cercle *ADC*, autour de *DC*, & la ſomme des cercles dont *HG* ſont les rayons, n'eſt autre choſe que le cone produit par la révolution du triangle *ECD* autour de *CD*; cet excès du cylindre ſur l'hémiſphére eſt donc égal au cone qui (*Cor. 2. Th 44.*) eſt le tiers du cylindre, parce qu'il a la même baſe & la même hauteur. Donc l'excès du cylindre ſur l'hémiſphére eſt auſſi le tiers du même cylindre, & par conſéquent l'hémiſphére eſt égal aux deux autres tiers du même Cylindre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

L'hémiſphére eſt donc le double du cone qui a la même baſe

baſe & la même hauteur, & ainſi comme (*Cor.* 3. *Th.* 44.) le cone eſt égal au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, l'hémiſphére ſera égal au produit de ſa baſe par les deux tiers de ſa hauteur, ou bien au produit d'un de ſes grands cercles par les deux tiers du rayon, & par conſéquent la ſphére, qui eſt le double de l'hémiſphére, ſera égale au produit d'un grand cercle par quatre tiers du rayon, ou bien par deux tiers du diamétre, & ce qui eſt la même choſe ; la ſphére eſt égale au produit de quatre de ſes grands cercles par le tiers du rayon.

SCOLIE.

L'on peut prouver par le moyen du cylindre circonſcrit, que la ſphére eſt égale au produit d'un de ſes grands cercles par les deux tiers de ſon diamétre ; car le cylidre eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur. Donc l'hémiſphére qui eſt égal aux deux tiers du cylindre qui a la même baſe & la même hauteur, ſera égal à un de ſes grands cercles par les deux tiers de ſa hauteur qui eſt le rayon. Et par conſéquent la ſphére, qui eſt le double de l'hémiſphére, eſt égale au produit d'un de ſes grands cercles par quatre tiers du rayon. Voilà qui ſuffit pour la ſolidité de la ſphére ; paſſons maintenant à ſa ſurface.

THEOREME XLVII.

La ſurface de la ſphére eſt égale à la ſomme de quatre grands cercles de cette même ſphére, c'eſt-à-dire, qui paſſent par ſon centre & s'étendent juſqu'à ſa ſurface. Tab. 14. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Comme le cercle (*Cor. Th.* 37.) n'eſt qu'un poligone d'une infinité de côtez, de même la ſurface de la ſphére peut être regardée comme compoſée d'une infinité de plans : ſoit la ſphére *A D B H* dont le centre eſt *C*, & *DEFG* une partie de ſa ſurface ; ſi cette partie eſt ſi petite qu'on puiſſe la regarder comme un des plans dont

la ſurface de cette ſphére eſt compoſée ; la pyramide *DEFGC* ſera égale au tiers du rayon, qui eſt ſa hauteur, multiplié par ſa baſe, & ainſi des autres pyramides infiniment petites dont la ſphére eſt compoſée. Donc, la ſomme de ces pyramides, qui n'eſt que la ſphére, eſt égale au produit du tiers du rayon par toutes les baſes infiniment petites *DEFG* dont la ſurface de la ſphére eſt compoſée. Mais (*Cor. Th.* 46.) la ſphére eſt égale au produit du tiers du rayon par quatre de ſes grands cercles. Donc, la ſurface de la ſphére eſt égale à la ſomme de quatre grands cercles de cette même ſphére. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLVIII.

Tab. 13. Fig. 2. La ſurface du cylindre droit, ſans ſes baſes, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par ſa hauteur.

DEMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe que les deux cotés *MP*, *NQ*, du cylindre droit *BDEF*, & ſont infiniment près l'un de l'autre, les baſes *BF* & *DE* (*Cor. Th.* 37) peuvent être regardées comme des poligones d'une infinité de côtés, de même la ſurface convéxe du cylindre, peut être regardée comme compoſée d'une infinité de parallélogrames d'une largeur infiniment petite, ou (*Scol. Th.* 27.) des produits de la hauteur *MP* du cylindre, par toutes les petites lignes droites dont le contour de ſa baſe eſt compoſé. Donc cette ſurface du cylindre droit, eſt égale au produit de ſa hauteur par le contour entier de ſa baſe. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Comme la hauteur du cylindre circonſcrit à la ſphére, eſt le diamétre de la ſphére, & ſa baſe un grand cercle de cette même ſphére, la ſurface de ce cylindre ſans les baſes, eſt égale au produit du diamétre de la ſphére inſcrite, par la circonférence d'un grand cercle de cette

ſphére ; ou bien (*Th.* 38.) à quatre de ſes grands cercles.

COROLLAIRE II.

La ſurface de la ſphére étant (*Th.* 47.) égale à quatre de ſes grands cercles, elle eſt donc égale à la ſurface, moins les baſes, du cylindre circonſcrit à cette ſphére.

COROLLAIRE III.

Puiſque la ſurface du cylindre ſans ſes baſes, eſt égale (*Cor.* 1.) à quatre grands cercles de la ſphére inſcrite, ſi l'on ajoûte à cette ſurface convéxe du cylindre, ſes baſes qui ſont deux grands cercles de la ſphére, toute la ſurface du cylindre, les baſes compriſes, eſt égale à ſix grands cercles, & ainſi, la ſurface de la ſphére étant quadruple d'un grand cercle (*Th.* 47.) la ſurface du cylindre, les baſes compriſes, eſt à la ſurface de la ſphére inſcrite, comme 6 eſt à quatre, ou bien (*Ax* 9.) comme trois eſt à deux. Mais la ſolidité du cylindre (*Th.* 46.) eſt à la ſolidité de la ſphére inſcrite, comme trois eſt à deux ; car la ſphére eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit. Donc, la ſurface du cylindre ſphérique circonſcrit, les baſes compriſes, eſt à toute la ſurface de la ſphére, comme ſa ſolidité eſt à la ſolidité de la même ſphére.

Ce Corollaire plut ſi fort à Archiméde, qu'il voulut qu'on mît ſur ſon tombeau une ſphére inſcrite dans un cylindre.

THEOREME XLIX.

La ſurface du cone droit *ABC*, ſans ſa baſe, eſt égale au produit de la moitié du côté *AB*, ou *BC*, par la circonférence *AECF* de ſa baſe. Tab. 14. Fig. 3.

On entend par cone droit, celui dont la ligne droite *BO* tirée de la pointe *B*, au centre de la baſe *AECF*, eſt perpendiculaire à cette baſe.

DEMONSTRATION.

Si de la pointe *B* du cone *AECFB*, on tire des lignes à tous les points de la baſe, comme *BD*, *BE*, &c. Premiérement, toutes ces lignes ſont égales; car en tirant les rayons *OA*, *OD*, *OE*, &c. les triangles *BOA*, *BOD*, *BOE*, &c. ſeront rectangles (*Déf.* 9.) dans le point *O*, & les côtés *OA*, *OD*, *OE* ſeront égaux, & *BO* étant un côté commun à tous ces triangles, leurs hypothenuſes *BA*, *BD*, *BE* (*Cor.* 1. *Th.* 24.) ſont egales, & ainſi le triangle *DBE* eſt iſoſcéle : mais les deux lignes droites *BD*, *BE* ſont (*Hyp.*) auſſi près l'une de l'autre qu'elles peuvent l'être ; ainſi chacune, par exemple, *BD* ſera la hauteur du triangle *DBE*, & par conſéquent (*Scolie Th.* 27.) l'aire de ce triangle, eſt égale au produit de la moitié du côté *B D* ou *B A*, multipliée par la partie infiniment petite *DE* de la circonférence *AECF* ; il en eſt de même de tous les autres petits triangles dont toute la ſurface du cone *ABC*, eſt compoſée. Donc, toute cette ſurface, ſans la baſe, eſt égale au produit de la moitié du côté *AB*, par toutes les parties infiniment petites *DE* de la circonférence *AECF*, ou bien par toute cette circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME L.

La ſphére eſt égale au cone dont la hauteur eſt le rayon de la ſphére, & dont la baſe eſt égale à quatre grands cercles de la ſphére.

DEMONSTRATION.

Le cone dont la hauteur eſt le rayon de la ſphére ; & la baſe égale à quatre grands cercles, eſt (*Cor.* 3. *Th.* 44.) le produit du tiers du rayon de la ſphére par quatre de ſes grands cercles : mais la ſphére (*Cor. Th.* 46.) eſt égale à ce même produit. Donc, la ſphére eſt égale au cone dont la hauteur ſeroit le rayon de la ſphére, & la baſe égale à quatre grands cercles de la même ſphére.

Voilà les Elémens de Géométrie dont nous allons faire voir l'utilité en paſſant à la ſeconde Partie.

SECONDE PARTIE.

De la Géométrie Pratique.

LA Géométrie Pratrique enſeigne à meſurer toutes ſortes d'étenduës, & comme toute étenduë eſt, ou ligne, ou ſurface, ou ſolide, nous la diviſerons en trois Chapitres. Dans le premier, nous traiterons des lignes; dans le ſecond, des ſurfaces; & dans le troiſiéme, des ſolides.

CHAPITRE PREMIER.

De la poſition & de la meſure des lignes droites.

PROBLEME I.

Mener d'un point donné, une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée. Tab. 15. Fig. 1.

SOLUTION.

Ou le point donné eſt dans la ligne droite ou hors de la ligne droite donnée.

PREMIER CAS.

Si le point donné eſt *D* hors de la ligne droite *FC*, & que par ce point *D* il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *FC*. Du centre *D* il faut décrire un arc de cercle qui coupe la ligne droite *F C* dans deux points *M* & *N*, & de ces mêmes points, comme

d'autant de centres, d'écrire deux arcs de cercle de même diamétre, qui ſe coupent dans le point *E*, enſuite mener la ligne droite *DE* : je dis, que cette ligne *DE* eſt perpendiculaire dans le point *A* à la ligne droite *FC*, comme on le demandoit.

DEMONSTRATION.

Les rayons *DM* & *DN* ſont (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) égaux; & par conſéquent le point *D* eſt également diſtant des extrêmitez *M* & *N* de la ligne *MN*. De même, puiſque (*l'Hyp.*) les rayons *ME* & *NE* ſont égaux, le point *E* eſt auſſi également diſtant des extrémités *M* & *N* de la même ligne droite *MN*. Donc (*Cor. Th.* 6.) la ligne *DE* eſt perpendiculaire à la ligne *MN*, ou *FC*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Tab. 2. Fig. 15. Qu'on prenne dans la ligne *FC* deux points, *B*, *C*, deſquels comme d'autant de centres on décrivé par le point donné *D* deux arcs de cercle, *DME*, *DNE*; ſi on méne une ligne par les points où ces arcs ſe rencontrent, je dis, que cette ligne eſt la perpendiculaire à la ligne *FC* menée du point donné *D*.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'Hyp.*) *BD* & *BE* ſont des rayons du même cercle *DME*, comme *CD* & *CE*, du cercle *DNE*, (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) $BD = BE$ & $CD = CE$, & par conſéquent la ligne droite *FC* a ſes deux points *B* & *C* également diſtans des extremités *D* & *E* de la ligne droite *DE*. Donc cette ligne *FC* (*Cor. Th.* 6.) eſt perpendiculaire à la ligne *DE*, & par conſéquent la ligne *DE* eſt (*Cor. Th.* 3.) perpendiculaire à la ligne *FC*. Ce qu'il falloit démonter.

SECOND CAS.

Tab. 15. Fig. 3. Si le point donné *D* eſt dans la ligne droite *FC*, il faut

prendre dans cette même ligne, deux points également distans du point *D*, savoir *M* & *N* desquels comme d'autant de centres, on décrit des arcs de cercle de même rayon, qui se coupent dans le point *E*; si on méne du point *E* au point *D*, une ligne droite, cette ligne est la perpendiculaire que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les rayons *ME* & *NE* des cercles qui se coupent en *E*, sont égaux; ce point *E* est également distant des extrémités *M* & *N* de la ligne droite *MN*, de même que le point *D* (*l'hyp.*), & par conséquent les deux points *E* & *D* de la ligne *ED*, sont également distans des extrémités *M* & *N* de la ligne droite *MN*. Donc (*Cor. Th. 6.*) la ligne *ED* est perpendiculaire à la ligne *MN*, dans le point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Du point *E* hors de la ligne droite donnée *FC*, comme du centre d'un cercle dont le rayon soit *CE*, il faut décrire l'arc de cercle *ADC* qui rencontre la ligne droite *FC* dans les points *D* & *C*, ensuite il faut prolonger la ligne *CE*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc de cercle dans le point *A*; si du point *A* on méne la ligne *AD*, je dis qu'elle est perpendiculaire à la ligne *FC* dans le point donné *D* de cette même ligne *FC*. Tab. 5. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

L'angle *ADC* est à la circonférence & appuyé sur la moitié du cercle. Donc (*Cor. 3. Th. 18.*) cet angle est droit & la ligne *AD* qui fait avec *CD* un angle droit, est perpendiculaire à cette ligne *CD*, & par conséquent à la ligne *FC*, dans le point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Si le point d'où il faut mener une perpendiculaire à une

ligne droite donnée, n'étoit point marqué, on pourroit encore opérer d'une autre façon.

Tab. 15. Fig. 5. Par exemple, pour mener une ligne perpendiculaire à une ligne donnée AE, il faut prendre dans cette ligne, $AB = BC$, & du point B mener la ligne $BD = AB$ & BC, qui faſſe avec AC tels angles qu'on voudra. Enſuite il faut prolonger DC vers F juſqu'à ce que CF ſoit $= AC$. Enfin il faut prendre $CE = CD$ & joindre les points F & E par la ligne droite FE. Je dis que cette ligne FE eſt perpendiculaire à la ligne droite donnée AE.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) les lignes droites BA, BD, BC ſont égales, le point D (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) ſe trouvera dans la circonférence du cercle dont le diamétre ſera AC & le centre B, & par conſéquent ſi on méne la ligne AD, l'angle ADC (*Cor.* 3. *Th.* 18.) ſera un angle droit; mais (*l'hyp.*) $CF = AC$ & $CE = CD$. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) $CF \cdot CE :: AC \cdot CD$, & par conſéquent les triangles FCE & ACD ont des côtés proportionnels, & les angles compris entre ces côtés (*Th.* 3.) égaux. Donc ces triangles ſont (*Cor.* 2. *Th.* 29.) ſemblables & équiangles. Donc, puiſqu'on vient de voir que l'angle ADC eſt un angle droit, l'angle FEC eſt auſſi un angle droit, ou bien FE eſt perpendiculaire à la ligne droite donnée AE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME II.

Tab. 16. Fig. 1. Mener par un point donné, une ligne paralléle à une autre ligne donnée.

SOLUTION.

Soit D le point donné par lequel doit paſſer la ligne paralléle à FC; qu'on méne la ligne DE, & du point H de la ligne FC comme du centre, qu'on décrive un arc de cercle GN dont le rayon ſoit $HG = DE$, & du point D comme du centre, qu'on décrive un autre arc de cercle MN dont le rayon ſoit $DG = HE$, qui coupe le premier dans

dans le point *G*; je dis que la ligne droite *DG* eſt la ligne paralléle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident par la conſtruction du quadrilatére *DH*, qu'il a ſes côtés oppoſés égaux; ſavoir *HG* = *ED* & *HE* = *GD*. Donc (*Th.* 26.) ce quadrilatére eſt un parallélograme, ou bien (*Déf.* 12.) ſes côtés oppoſés ſont paralléles. Donc *DG* eſt paralléle à *EH*, & par conſéquent à la ligne donnée *FC*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 16. Fig. 2.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on méne du point donné *D*, une ligne droite, comme *ED*, dans laquelle prolongée vers *A*, on prenne *EA* = *DE*. Qu'on méne enſuite du point *A*, une ligne comme l'on voudra, par exemple *AH*, qu'on prolonge cette ligne vers *G* juſqu'à ce que *HG* ſoit = *AH*; ſi après cela on méne la ligne *GD*; je dis que cette ligne eſt la paralléle qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) *AH* = *GH* & *AE* = *DE*. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AH*. *GH* :: *AE*. *DE*. & par conſéquent (*Part.* 2. *Th.* 29.) *GD* eſt paralléle à la ligne *HE*, ou *FC*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME III.

D'un point donné mener une ligne, qui avec une autre ligne auſſi donnée, faſſe un angle égal à un angle donné. Tab. 16. Fig. 3. & 4.

SOLUTION.

Ou le point donné eſt dans la ligne donnée, ou hors de cette ligne.

PREMIER CAS.

Soit le point donné *B* dans la ligne donnée *FG*, qu'il faille dans ce point *B* faire un angle égal à l'angle *A* de

la fig. 3. tab. 16. Qu'on décrive, des points *A* & *B* pris pour centres, avec la même ouverture de compas, les arcs *EK*, *GK*, dont le premier rencontre les côtés de l'angle *A* dans les points *E* & *L*, & l'autre, la ligne droite donnée, dans le point *G* : enſuite après avoir ouvert & placé le compas dans les points *E* & *L*, qu'on prenne dans l'arc *GK*, *GH* = *EL*, & qu'on méne la ligne *BH*: Je dis que l'angle *HBG* eſt égal à l'angle donné *A*.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) les lignes *EL* & *GH* ſont égales, & que les côtés *AE*, *AL*, *BG*, *BH* ſont des rayons de deux cercles égaux ; les triangles *LAE*, & *HBG* ſont (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) équilatéraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) leurs angles *A* & *B* ſont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on méne de tel point qu'on voudra, par exemple du point *L* du côté *AL* de l'angle donné, une ligne perpendiculaire (*Prob.* 1.) au côté *AE*, enſuite qu'on prenne *BG* = *AD*. Qu'on méne du point *G* la ligne perpendiculaire *GM* à la ligne droite *BC*, qu'on prenne *GH* = *DL*, & qu'on méne la ligne *BH*: Je dis que l'angle *CBH* eſt égal à l'angle donné *EAL*.

Fig. 5. Tab. 16. & Fig. 6.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) les angles *D* & *G* ſont deux angles droits, & par conſéquent égaux, & qu'ils ont des côtés ſemblables les uns aux autres, ſavoir *BG* = *AD* & *GH* = *DL*, les triangles *BGH* & *ADL* ſont (*Cor.* 2. *Th.* 29.) égaux, donc l'angle *HBG* eſt égal à l'angle donné *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND CAS.

Si le point donné eſt hors de la ligne droite donnée, comme le point *B* hors de la ligne donnée *FC*, & qu'il faille de ce point mener une ligne qui faſſe avec la ligne

Tab. 16. Fig. 7. & 8.

FC l'angle *BHC* égal à l'angle donné *A*. D'un point de la ligne donnée *FC*, pris à volonté, comme *G*, qu'on méne une ligne qui faſſe (*Sol.* 1. *Cas.*) un angle avec *FC* égal à l'angle donné *A*. Enſuite qu'on méne du point *B* (*Prob.* 2.) la ligne *BH* paralléle à la ligne *LG* : Je dis que l'angle *BHC* eſt égal à l'angle donné.

DEMONSTRATION.

Puiſque *BH* & *LG* ſont (*l'hyp.*) paralléles, l'angle *BHC* (*Déf.* 5.) eſt égal à l'angle *LGC*, qui (*l'hyp.*) eſt égal à l'angle donné.

PROBLEME IV.

Couper en deux parties égales un angle donné.

SOLUTION.

Soit l'angle *FAE* qu'il faut couper en deux parties égales. Du point *H* pris à volonté dans le côté *AF*, qu'on méne (*Prob.* 2.) la ligne *HG* paralléle à l'autre côté *AE*; enſuite qu'on prenne dans *HG*, *HB* = à la ligne *HA*, & qu'on méne la ligne *AB* : Je dis que cette ligne *AB* coupe l'angle donné *FAE* en deux parties égales. Tab. 17. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) *HB* = *HA*, les angles *HAB*, & *HBA* ſont (*Th.* 22.) égaux entre eux ; & (*l'hyp.*) la ligne *HB* étant paralléle à la ligne *AE*, les angles alternes *HBA*, & *BAE* ſont auſſi (*Th.* 8.) égaux entre eux. Donc (*Ax.* 6.) les angles *HAB*, & *BAE* ſont auſſi égaux, & par conſéquent la ligne droite *AB* coupe l'angle donné *FAE* en deux parties égales. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on prenne les parties *AC*, *CD*, dans le côté *EA* de l'angle donné *FAE* qu'il faut couper par la moitié, égales chacunes à *AH* priſe à volonté dans l'autre côté *AF* de l'angle donné *FAE*. Enſuite qu'on méne du point *D* Tab. 17. Fig. 2.

par le point *H*, la ligne *DH* dans laquelle prolongée vers *B* on aura *HB* = *DH* : Je dis que la ligne droite *AB* coupe l'angle donné *EAF* en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne *CH*, il eſt conſtant que puiſque (*l'hyp.*) *DC* = *CA*, & *DH* = *HB* (*Cor.* 1. *Def.* 17.) *DC*. *CA* :: *DH*. *HB*, & par conſéquent (*Part.* 2. *Th.* 29.) *CH* eſt paralléle à *AB*. Donc les angles *EAB* & *ECH* (*Déf.* 5.) ſont égaux, de même que les alternes (*Th.* 8.) *BAH* & *AHC*. Mais (*l'hyp.*) *CA* eſt auſſi = *AH*. Donc dans le triangle *CAH*, les angles *ACH* & *AHC* ſont égaux entre eux. Donc les angles *EAB* & *BAH* ſont auſſi égaux, & par conſéquent la ligne droite *AB* coupe par la moitié l'angle donné *EAF*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Tab. 17. Fig 3. Qu'on décrive du centre *A* un arc de cercle *HK* de tel rayon qu'on voudra, qui rencontre les côtés de l'angle donné *EAF* dans les points *H* & *K*, deſquels comme d'autant de centres on décrive des arcs de tel autre rayon qu'on voudra, qui ſe coupent dans le point *B* : Je dis que la ligne droite *AB* coupe l'angle donné *EAF* en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puiſque *AH* & *AK* ſont des rayons du même cercle, *AH* eſt (*Cor.* 2. *Def.* 6.) = *AK*. De même, puiſque les lignes droites *HB* & *BK* ſont (*l'hyp.*) des rayons de deux cercles égaux. Donc le côté *AB* étant commun aux deux triangles *AHB*, & *AKB*, ces deux triangles ſont équilatéraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) leurs angles *HAB*, & *BAK* ſont égaux entre eux, ou bien la ligne droite *AB* coupe par la moitié l'angle donné *EAF*. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut aiſément diviſer par la même méthode un an-

gle en quatre, huit, seize &c. parties égales, en divisant chaque partie en deux.

PROBLEME V.

Diviser un angle droit en trois parties égales. Tab. 17. Fig. 4.

SOLUTION.

Du centre *A*, qu'on décrive un arc de cercle de tel rayon qu'on voudra, par exemple l'arc *HGK*, qui rencontre dans les points *H* & *K* les côtés *AF* & *AE* de l'angle donné *FAE*. Ensuite du centre *K*, qu'on décrive un autre arc de cercle de même rayon, qui coupe le premier dans le point *G*, & qu'on méne la ligne *AG*. Je dis que l'angle *FAG* est la troisiéme partie de l'angle donné *EAF*.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes droites *AK*, *KG* & *AG* sont (*l'hyp.*) des rayons égaux des arcs *KG* & *AG*, le triangle *AKG* sera équilatéral, & par conséquent (*Cor.* 2. *Th.* 22.) équiangle. Donc, puisque (*Th.* 21.) ses trois angles sont égaux à deux angles droits, ou bien à 180 degrés, chacun de ces angles sera égal au tiers de 180; c'est-à-dire à 60, mais l'angle droit *EAF* est égal à 90 degrés. Donc l'angle *GAF* est égal à 30 degrés, & par conséquent est la moitié de l'angle *EAG*, ou bien le tiers de tout l'angle *EAF*. Donc si (*Probl.* 4.) on divise l'angle *EAG* en deux parties égales, chacune de ces parties sera encore le tiers de l'angle donné *EAF*. Donc par la méthode présente on peut diviser un angle donné en trois parties égales.

PROBLEME VI.

Couper un angle rectiligne en trois parties égales.

SOLUTION.

Il faut attacher au compas *GEH* un autre compas, de maniére qu'ils fassent ensemble un rhombe comme le compas *FZB* qui fait avec le compas *GEH* le rhombe *EF* Tab. 17. Fig. 5.

ZB, qu'on peut ouvrir ou fermer, & que *EH* ſoit au moins triple de *EB*. ſoit l'angle donné *AZD* qu'il faut couper en trois parties égales : De ſes côtés *ZA* & *ZD*, il faut couper les parties *ZR* & *ZX* qui ſoient égales à *EB*. Enſuite qu'on place le centre *Z* de l'inſtrument dans le ſommet *Z* de l'angle donné *AZD*, & qu'on ferme le compas juſqu'à ce que *EG* & *EH* paſſent par les points *R* & *X*, & que l'eſpace *RX* ſoit compris entre les jambes du compas; je dis que l'angle *REX*, ou *GEH* eſt le tiers de l'angle donné *AZD*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne diagonale *EZ* vers *S* ſi loin qu'on voudra ; puiſque les deux triangles *EBZ*, *BZX* ſont (*conſtruc.*) Iſocéles, l'angle externe *XBZ* ou *ZXB* ſera (*Th.* 22. *& Cor*, 5. *Th.* 21.) le double de l'angle *BEZ*. Donc puiſque l'angle externe *XZS* par rapport au triangle *EZX* eſt égal (*Cor.* 5. *Th.* 21.) aux deux internes oppoſés *XEZ* & *ZXE*, ce même angle *XZS* ſera le triple de l'angle *XEZ*. De même l'angle externe *RZS* eſt par rapport au triangle *REZ*, le triple de l'angle *REZ*. Donc tout l'angle *RZX*, ou bien l'angle donné *AZD* eſt le triple de l'angle *REX*: & par conſéquent l'angle *REX*, ou bien *GEH* eſt le tiers de l'angle donné *AZD*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

De ce problême ſuit la méthode générale de diviſer un angle rectiligne en autant de parties égales qu'on voudra, comme on le peut voir par le Problême ſuivant.

PROBLEME VII.

Diviſer un angle rectiligne en autant de parties égales qu'on voudra.

SOLUTION.

Tab. 17. Fig. 6. Soit premiérement l'angle donné *AKD*, qu'il faut diviſer en pluſieurs parties égales. Qu'on ajoûte à l'inſtru-

ment dont on s'eſt ſervi dans le problême précedent, un autre rhombe équilateral au premier, de maniére que lorſqu'on ferme les rhombes en fermant l'inſtrument, les ſommets *X* & *R* puiſſent couler vers *G*, *H*, ſur les côtés *EG*, *EH*, ou dans un canal creuſé dans ces côtés ; & que *EG* & *EH* ſoient au moins cinq fois plus longs que *EF* ou *EB*. Les choſes étant ainſi, qu'on coupe les parties *KM* & *KN* égales à *EB*, qu'on place après cela le centre *K* de l'inſtrument, comme on l'a dit ci-deſſus, dans le ſommet *K* de l'angle donné *AKD*, & qu'on ferme le compas juſqu'à ce que l'eſpace *MN* ſoit compris entre les côtés *EG*, *EH* : je dis, que l'angle *MEN* eſt la cinquiéme partie de l'angle donné *AKD*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la diagonale *EZ* vers *S* ſi loin qu'on voudra, elle paſſera par le point *K*. Car puiſqu'on a démontré (*Probl.* 6.) que les angles *XZS*, *RZS* ſont chacuns le triple des angles égaux *BEZ*, *FEZ* ; les angles *XZK*, *RZK*, ſont donc égaux entr'eux, & (*Cor.* 3. *Th.* 26.) *ZK* eſt diagonale du rhombe *ZRKX*. Cela étant ainſi, puiſque l'angle *XZK*, ou bien (*Th.* 22.) *XKE* eſt (*Probl.* 6.) le triple de l'angle *XEK*, & que l'angle externe *NXK*, ou bien (*Th.* 22.) *KNE* (*Cor.* 5. *Th.* 21. *& Probl.* 6.) eſt égal à l'angle interne *XEK*, & à l'angle *XKE* qui en eſt le triple ; le même angle *KNE*, ſera le quadruple de l'angle *NEK*. Donc l'angle externe *NKS* par rapport au triangle *EKN*, ſera cinq fois plus grand que l'angle *NEK*. On peut de même démontrer que l'angle *MKS* eſt cinq fois plus gtand que l'angle *MEK* ; Et par conſéquent tout l'angle *MKN*, ou l'angle donné *AKD* eſt cinq fois plus grand que l'ange *MEN*. Donc cet angle *MEN*, ou bien *GEH* eſt la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné *AKD*.

S'il falloit diviſer l'angle donné en ſept parties égales, il faudroit ajoûter un troiſiéme rhombe conſtruit de la même façon, & ainſi des autres ; ce qui n'a pas beſoin d'une

nouvelle démonſtration. L'on peut donc par cette méthode diviſer un angle en autant de parties égales qu'on voudra.

COROLLAIRE.

Si on a un inſtrument compoſé de pluſieurs rhombes, le premier *FEBZ* ſervira à diviſer l'angle donné en trois parties, en plaçant le centre *Z* au ſommet de l'angle donné, & fermant l'inſtrument de maniére que les côtés *ZX*, *ZR* du rhombe ſuivant conviennent avec les côtés de l'angle donné ; le ſecond rhombe ſervira à diviſer cet angle en cinq parties égales, en plaçant le centre *K* au ſommet de l'angle donné, & rapprochant les côtés du compas juſqu'à ce que les côtés du rhombe ſuivant, conviennent avec ceux de l'angle donné. Le troiſiéme, ſervira à diviſer l'angle donné en ſept parties égales, & ainſi des autres.

PROBLEME VIII.

Diviſer la circonférence d'un cercle en 360 parties égales, qu'on appelle degrés.

SOLUTION.

Il faut premiérement diviſer le cercle donné en quatre parties égales, par le moyen de deux diamétres (*Probl.* 1.) perpendiculaires, enſuite chaque quart de cercle en trois parties égales (*Probl.* 5.) ; après cela, ſi on applique aux trois autres quarts de cercle, l'ouverture du compas égale à une de ces parties, il eſt conſtant que chacune de ces parties ſera la douziéme de tout le cercle, & par conſéquent de 30. dégrés. Si on diviſe encore chacune de ces parties en deux (*Probl.* 4.) chacune de ces parties ſera de 15. degrés ; enſuite ſi (*Probl.* 5.) on diviſe chacune de ces parties de 15. degrés en trois, celles qui reſulteront de cette diviſion ſeront de 5. degrés, qui étant (*Probl.* 7.) diviſées en cinq parties donneront les 360. degrés que l'on cherche.

SCOLIE.

SCOLIE.

La méthode de diviſer ainſi le cercle, eſt exprimée par le vers ſuivant qui doit s'entendre du quart de cercle.

In tres, in binas, in tres, in quinqueſecato.

L'on peut par la même méthode pouſſer plus loin la diviſion du cercle, s'il eſt néceſſaire, & le diviſer en minutes premiéres, ſecondes, &c. en diviſant chaque degré en 60 parties, & chacune de ces parties en 60 autres. On fera beaucoup plus ſûrement cette diviſion dans les petits arcs, par le moyen du compas ordinaire, que par le moyen de l'inſtrument du Problême 7.

Le cercle ainſi diviſé peut ſervir à diviſer de même tout autre cercle concentrique, auſſi-bien qu'à connoître les rayons viſuels de toutes les choſes que l'on peut regarder : Ce qui eſt très-utile pour meſurer toutes ſortes de diſtances & d'étenduës, comme on le verra dans la ſuite.

PROBLEME IX.

Diviſer une ligne droite en pluſieurs parties qui ſoient entr'elles en tel rapport qu'on voudra. Tab. 18. Fig. 1.

SOLUTION.

Soit la ligne droite AB qu'il faut diviſer en pluſieurs parties, qui ſoient entr'elles en raiſons données. Qu'on méne à l'extrêmité de cette ligne donnée la ligne AX; qu'on prenne dans cette ligne des parties en mêmes raiſons, & en même nombre que les parties de la ligne donnée AB, & que la derniére de ces parties ſoit VN; qu'on méne enſuite la ligne droite BN, & des points R, S, V, des lignes (*Probl.* 2.) paralléles à BN, ſavoir RC, SD, VE, &c. qui rencontrent la ligne donnée AB en autant de points : Je dis, que cette ligne AB eſt diviſée en autant de parties & telles qu'on le ſouhaittoit.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'Hyp.*) les lignes *BN, EV, DS, CR*, &c. ſont paralléles, *AC. CD :: AR. RS* (*Th.* 29.) Donc ſi on méne (*Probl.* 2.) la ligne *CF* paralléle à la ligne *AX*, & qu'elle rencontre en *H* & *F* les lignes *DS* & *EV* paralléles (*l'Hyp.*) à la ligne *CR*, on aura auſſi (*Th.* 29.). *CD. DE :: CH. HF :: RS. SV* (*Part.* 2. *Th.* 26.). ſi on méne (*Probl.* 2.) la ligne *DG* paralléle à la ligne *AX*, & qu'elle rencontre en *K* & *G* les lignes droites *EV*, *BN* qui ſont (*l'Hyp.*) paralléles à la ligne *SD*; on aura de même (*Th.* 29.) *DE. EB :: DK. KG* (*Th.* 26. *Part.* 2.) *:: SV. VN*; & ainſi des autres, ſi on demandoit plus de parties qu'il n'y en a dans la ligne *AB*. Nous avons donc *AC. CD :: AR. RS*, de plus *CD. DE :: RS. SV*, & *DE. EB :: SV. VN*, & par conſéquent la ligne droite donnée *AB* eſt diviſée en parties *AC, CD, DE, EB*, proportionnelles aux parties *AR, RS, SV, VN*, priſes dans *AX*. Donc puiſque le nombre des unes & des autres eſt le même & qu'elles ſont en mêmes raiſons, la ligne donnée *AB* eſt enfin diviſée en autant de parties & telles qu'on le ſouhaittoit.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 2. & 3. Tab. 18.

Qu'on prenne dans la ligne prolongée ſi loin qu'on voudra, autant de parties *FG, GH, HK, KL* en raiſons données avec les parties qu'on cherche dans la ligne droite donnée *AB*, & en même nombre. Des points *F, L* pris pour centres, qu'on décrive des arcs de cercle dont le rayon ſoit *FL*, que ces arcs ſe coupent dans le point *N*, & que par ce moyen on faſſe le triangle équilateral *FNL*; qu'on prenne dans les deux côtés *NF, NL* de ce triangle, les parties *NB* & *NA* égales chacunes à la ligne donnée *AB* qui faſſe avec elles un autre triangle équilateral *BNA*. Enſuite qu'on méne du ſommet *N* par tous les points *G, H, K* des diviſions de la ligne *FL*, autant de lignes droites *NG, NH,*

NK, qui étant prolongées rencontrent la ligne donnée *AB* en autant de points *E*, *D*, *C*: Je dis, que cette ligne *AB* eſt diviſée par cette méthode en parties *BE*, *ED*, *DC*, *CA*, telles qu'on le ſouhaittoit.

DEMONSTRATION.

Il eſt conſtant par la conſtruction des triangles *FNL*, & *BNA* qu'ils ſont équilateraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) équiangles. Donc les angles *F* & *B* ſont égaux entr'eux, & ainſi (*Déf.* 5.) les lignes droites *FL* & *BA* ſont paralléles, & les triangles *BNE* & *FNG* équiangles, auſſi-bien que *END* & *GNH*. Donc (*Cor.* 1 *Th.* 29.) *BE*. *FG* :: *NE*. *NG* :: *ED*. *GH* :: *ND*. *NH* :: *DC*. *HK* :: *NC*. *NK* :: *CA*. *KL*. Donc (*Reg.* 2. *Prop.*) *BE*. *ED* :: *FG*. *GH*; de même *ED*. *DC* :: *GH*. *HK*. De plus *DC*. *CA* :: *HK*. *KL*. Donc les parties *BE*, *ED*, *DC*, *CA* de la ligne droite donnée *BA*, ſont en même rapport entr'elles, que les parties *FG*, *GH*, *HK*, *KL* de la ligne *FL*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME X.

Décrire un cercle par trois points donnés qui ne ſoient pas diſpoſés en ligne droite.

SOLUTION.

Que les points donnés ſoient *F*, *A*, *B*. Qu'on joigne ces points par les lignes droites *AF*, & *AB*. Enſuite (*Prob.* 9. & 1.) du milieu de ces lignes qu'on éléve les perpendiculaires *EC*, *DC* qui ſe rencontrent dans le point *C*: Je dis, que ce point *C* eſt le centre du cercle qui paſſe par les trois points donnés *F*, *A*, *B*. Tab. 18. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'Hyp.*) *EC* & *DC* ſont perpendiculaires au milieu des lignes *AF*, *AB*, il s'enſuit (*Th.* 5.) que

tous les points de la ligne *EC*, ſont également diſtans des extrêmités *A* & *F* de la ligne droite *AF*, & que tous ceux de la ligne *DC*, ſont auſſi également éloignés des extrêmités *A* & *B* de la ligne *AB*. Donc le point *C* commun aux lignes droites *EC* & *CD* eſt également diſtant des points *F*, *A*, *B*; ou bien les lignes droites *CF*, *CA*, *CB*, ſont égales. Donc (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) le cercle décrit du centre *C*, qui a pour rayon *CF*, paſſe auſſi par les deux autres points donnés *A* & *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Tab. 18. Fig. 4.

On peut, par cette même méthode, trouver le centre d'un cercle ou d'un arc de cercle, comme *FAB*, en menant deux lignes ou cordes *AF* & *AB*, & les coupant par la moitié par le moyen des perpendiculaires *EC*, & *DC*; car le point *C* ſeroit le centre cherché.

PROBLEME II.

Mener une ligne qui touche un cercle dans un point donné.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 5.

Si *D* eſt le point donné: après avoir trouvé (*Problême* 10.) le centre *C* du cercle donné *DEF*, qu'on méne le rayon *DC*, & dans le plan du cercle, la perpendiculaire (*Probl.* 1.) *DL* à ce rayon. Il eſt conſtant (*Cor* 6. *Th.* 11.) que cette perpendiculaire eſt la tangente que l'on cherche.

Si le point donné eſt hors du cercle donné *DEF*, comme le point *A*. Après avoir trouvé comme auparavant le centre *C*, qu'on méne la ligne *AC* & qu'elle ſoit le diamétre du cercle *ADC* qui coupe en *D* le cercle donné *EDF*, qu'on méne enſuite la ligne *AD*: Je dis qu'elle eſt la tangente que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Qu'on méne la ligne *DC*; puiſque l'angle rectiligne *A*

DC eſt (*l'Hyp.*) dans le demi cercle, il eſt (*Cor.* 3. *Th.* 18.) droit, & par conſéquent (*Cor.* 6. *Th.* 11.) *AD* touche le cercle donné *EFD* dans le point *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XII.

Trois lignes droites *AB*, *AC*, *AF* étant données, trouver une quatriéme proportionnelle. Tab. 18. Fig. 6.

SOLUTION.

Qu'on diſpoſe en ligne droite la ſeconde *AC* & la troiſiéme *AF* des lignes données, & que la premiére les rencontre dans tel point que l'on voudra, par exemple dans le point *A*. Qu'on décrive enſuite (*Probl.* 10.) un cercle par les trois points *CBF*; enfin qu'on prolonge la ligne *BA* juſques au point *L* de la circonférence du cercle : Je dis que la ligne *AL* eſt la quatriéme proportionnelle cherchée, ou bien que *AB*· *AC*:: *AF*· *AL*.

DEMONSTRATION.

Tab. 18. Fig. 6.

Puiſque (*l'hyp.*) les cordes *CF* & *BL* ſe coupent dans le point *A* (*Th.* 39.) *AB*· *AC*:: *AF*· *AL*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on diſpoſe en ligne droite *AB* & *AC*, qu'on faſſe enſuite tel angle qu'on voudra dans le point *B*, par exemple *CBD*, & que dans le côté *BD* prolongé ſi loin qu'on voudra, on prenne *BE* = *AF*; qu'on méne enſuite la ligne droite *AE*, & la ligne *CL* du point *C*, qui ſoit paralléle à la ligne *AE*, & qui rencontre *BD* dans le point *L* : Je dis que la ligne *EL* eſt la quatriéme proportionnelle cherchée, & que *AB*· *AC*:: *AF*· *EL*. Tab. 18. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

La ligne *CL* (*conſtruc.*) eſt paralléle à la ligne *AE*. Donc (*Th.* 29.) *AB*· *AC*:: *BE*· *EL*. Mais (*conſtruc.*) *BE* eſt = *AF*. Donc *AB*· *AC* :: *AF*· *EL*. Donc *EL* eſt la qua-

triéme proportionnelle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIII.

Deux lignes droites *AC*, & *AF* étant données, trou-
Tab. 18. Fig. 8. ver entre elles une moyenne proportionnelle.

SOLUTION.

Il faut diſpoſer en ligne droite *AC* & *AF*, & décrire un cercle dont *CF* ſoit le diamétre, enſuite il faut élever ſur ce diamétre une perpendiculaire *AB*, qui rencontre la circonférence du cercle dans le point *B* : Je dis que la ligne *AB* eſt la moyenne proportionnelle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Si on prolonge *AB* de maniére qu'elle rencontre un autre point *L* de la circonférence ; puiſque (*l'Hyp.*) *CF* paſſe par le centre du cercle, & qu'elle eſt perpendiculaire à la corde *BL*, (*Cas* 3. *Th.* 12.) elle coupe cette corde par la moitié en *A*. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AB. AF* :: *AL. AF* ; mais (*Th.* 39.) *AC. AB* :: *AL. AF*. Donc *AC. AB* :: *AB. AF*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on décrive ſur le diamétre compoſé des lignes droites données *AC* & *AF*, le demi cercle *CBF*, qui rencontre dans le point *B* la ligne droite *AB* perpendiculaire à *CF* dans le point *A*, qui eſt celui de la jonction des parties *AC* & *AF* dont ce diamétre eſt formé : Je dis que la ligne *AB* eſt la proportionnelle cherchée.

DEMONSTRATION.

Si on méne les lignes droites *CB*, *BF*, il eſt conſtant (*Cor.* 3. *Th.* 18.) que l'angle *CBF* eſt droit, comme (*Hyp.*) les angles qui ſont dans le point *A*, & ainſi comme l'angle *BCA* eſt commun aux deux triangles *CBF* & *CBA*, le troiſiéme angle *BFC* du premier triangle, eſt égal au troiſiéme angle du ſecond triangle. Donc le triangle *CBA* eſt

équiangle au triangle *CBF*. On peut par la même raiſon démontrer que le triangle *BAF* eſt équiangle au triangle *CBF*, & par conſéquent les deux triangles *CBA* & *BAF* ſont équiangles. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AC. AB* :: *AB. AF*, & par conſéquent *AB* eſt la moyenne proportionnelle entre les lignes données *AC* & *AF*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIV.

La moyenne de trois proportionnelles étant donnée avec la ſomme des extrêmes, trouver ces extrêmes. Tab. 18. Fig. 9.

Ou couper une ligne droite *BC* dans le point *H*, de maniére que le rectangle ſous les ſegmens *BH* & *HC* ſoit égal au quarré de la ligne droite donnée *A* qui n'eſt pas plus longue que la moitié de la ligne *BC* qu'il faut couper.

SOLUTION.

Après avoir décrit ſur *BC* le demi cercle *BEC*, qu'on éléve (*Probl.* 1. & 9.) du point du milieu *D*, la perpendiculaire *DE*, dans laquelle on prenne *DF* = *A*, & qu'on méne (*Probl.* 2.) *FG* paralléle à la ligne *BC*, de maniére qu'elle coupe la circonférence dans le point *G*. Qu'on méne enſuite du point *G* la perpendiculaire (*Probl.* 1.) *GH* à la ligne *BC*: Je dis que *BH* & *HC* ſont les extrêmes proportionnelles cherchées, ou bien que le rectangle ſous *BH* & *HC* eſt égal au quarré de *GH* ou de la ligne donnée *A*.

DEMONSTRATION.

Premiérement, il eſt conſtant par le Problême précedent 13. que *BH. HG* :: *HG. HC*, c'eſt-à-dire (*conſtruc.*) *BH. A* :: *A. HC*, & par conſéquent (*Lem.* 1.) le produit de *BH* & *HB* = au quarré de *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

On voit, par la Démonſtration, que la ligne donnée *A*

moyenne proportionnelle n'eſt pas plus grande que la moitié de la ſomme donnée *BC* des deux extrêmes que l'on cherche.

PROBLEME XV.

La moyenne de trois proportionnelles, étant donnée avec la différence des extrêmes, trouver ces extrêmes.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 10.

Soit la moyenne proportionnelle donnée *A*, & *BC* la différence des extrêmes, qu'on méne (*Probl.* 1.) la perpendiculaire $CD = A$; du point *E* pris pour centre, qui eſt le milieu de la ligne *BC*, qu'on décrive par le point *D* le cercle *FDG*, qui rencontre la ligne *BC* prolongée des deux côtés, dans les points *F* & *G*. Il eſt conſtant (*Probl.* 13.) que les lignes droites *CF* & *CG* ſont les extrêmes proportionnelles cherchées.

PROBLEME XVI.

Couper la ligne droite *AB* en deux parties *AG* & *GB*, telles que *AB* ſoit à *AG* :: *AG*· *GB*. C'eſt-à-dire, en moyenne & extrême raiſon.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 11.

Qu'on éléve ſur l'extrêmité *B* de la ligne droite donnée *AB*, une ligne *BE* perpendiculaire (*Probl.* 1.) & égale à la ligne *AB*; qu'on décrive enſuite le cercle *DEFB* dont *BE* ſoit le diamétre, & que par le centre *C*, on méne du point *A*, la ligne droite *AD* qui rencontre ce cercle dans les deux points *F* & *D*. Du point *A* pris pour centre, qu'on décrive un cercle dont *AF* ſoit le rayon, & qui coupe *AB* dans le point *G* : je dis, que cette ligne *AB* eſt telle que *AB*· *AG* :: *AG*· *GB*.

DEMONSTRATION.

Puiſque, par la conſtruction, l'angle *ABC* eſt droit, la ligne *AB* doit (*Cor.* 6. *Th.* 11.) toucher le cercle dans le

le point *B*, & par conſéquent (*Cor. 2. Th. 39.*) *AD. AB :: AB. AF.* Donc (*Rég. 4. prop.*) *AD — AB. AB :: AB — AF. AF.* C'eſt-à-dire que *AF* ou *AG. AB :: BG. AG*, ou (*Régl. 2. prop.*) *AB. AG :: AG. BG.* Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 18. Fig. 12.

PROBLEME XVII.

Une ligne droite indéfinie *NZ* étant donnée, & coupée dans les points *A* & *K*, la couper une troiſiéme fois de telle maniére que *NK* ſoit à *AE :: AE. NA.*

SOLUTION.

Qu'on éléve ſur le point *A* (*Probl. 1.*) une ligne perpendiculaire *AH* à la ligne *NZ*, qu'on décrive un demi cercle dont le diamétre ſoit *NK*, & que ce demi cercle coupe la ligne *AH* dans le point *H*. Que dans la figure 1. de la table 19. on méne (*Probl. 1.*) *KH* perpendiculaire à la ligne donnée *NZ*, qui ſoit auſſi coupée en *H* par le demi cercle *NHA*. Qu'on méne enſuite dans les deux figures, la ligne *NH* ſur laquelle dans le point *H* il faut (*Probl. 1.*) élever la perpendiculaire *HL*, égale à la ligne *NC*, qui eſt la moitié de *NK*. Qu'on décrive enſuite du point *L* pris pour centre, un cercle qui paſſe par le point *H*; il touchera (*Cor. 6. Th. 11.*) la ligne droite *NH* dans le point *H*, & après avoir mené la ligne droite *NL* juſqu'à ce qu'elle rencontre ce cercle dans le point *P*, qu'on prenne *AE* = *MP*: je dis, que pour lors on aura *NK. AE :: AE. NA.*

Tab. 19. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Puiſque les angles *KHN* & *HAN* dans la premiere figure, c'eſt-à-dire, la figure 12. table 18. & les angles *AHN* & *HKN* de la ſeconde figure, c'eſt-à-dire, la premiére de la table 19. ſont (*par le Cor. 3. Th. 18. & l'Hyp.*) des angles droits, & que l'angle *HNA* dans les deux figures, eſt commun aux deux triangles *KHN*, &

AHN, ces triangles ſont (*Cor.* 4. *Th.* 21.) équiangles; & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $KN \cdot HN :: HN \cdot AN$. Donc (*Lem.* 1. *prop.*) le produit de KN par AN des extrêmes, eſt égal au produit des moyennes, c'eſt-à-dire, au quarré de HN, ou bien (*Cor.* 2. *Th.* 39.) au produit de PM par NM.

De plus, puiſque (*par l'hyp.*) $EA = MP$, & $MP = 2HL = KN$, on aura auſſi $EA \times KN = MP \times MP$. Donc les produits ou rectangles $KN \times AN$, & $EA \times KN$ ſeront égaux à ces deux autres $PM \times NM$, & $PM \times PM$; mais (*par la conſtruction*) $PM = AE$. Donc $KN \times AN = AE \times AE$, & par conſéquent (*Lem.* 1.) $KN \cdot AE :: AE \cdot AN$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XVIII.

Deux côtés d'un triangle rectiligne & l'angle oppoſé à l'un de ces côtés, étant donnés, trouver l'angle dont on connoît l'eſpéce, c'eſt-à-dire, s'il eſt obtus ou aigu, oppoſé à l'autre côté donné. Tab. 19. Fig. 2.

SOLUTION.

Soit un triangle rectiligne ABC, dont on connoiſſe les deux côtés AB & AC, avec l'angle C oppoſé au côté AB; on demande quelle eſt la valeur de l'angle B oppoſé à l'autre côté donné AC, Qu'on faſſe cette analogie : le côté donné AB eſt au ſinus de l'angle auſſi donné C, comme l'autre côté donné AC eſt à l'angle B que l'on cherche; & le quatriéme terme de cette analogie (*Th.* 40.) ſera le ſinus de l'angle B que l'on cherche, lequel ſinus trouvé dans les tables, fera connoître les degrés & les minutes de cet angle. On trouvera ce quatriéme terme par la régle de trois.

Mais parce que (*Scol. Th.* 42.) le ſinus de deux angles dont l'un eſt aigu & l'autre obtus, eſt le même lorſque la meſure de ces angles pris enſemble, eſt un demi cercle, l'on doit connoître ſi l'angle que l'on cherche eſt aigu ou obtus.

Après avoir trouvé l'angle *B*, il eſt facile de trouver le troiſiéme *A*, puiſque les trois angles d'un triangle ſont toûjours égaux à deux droits ou à 180 degrés. Donc deux côtés d'un triangle rectiligne, avec un des angles oppoſés à ces côtés, étant donnés, & l'eſpéce de l'autre, l'on trouve cet autre angle & le troiſiéme.

AVERTISSEMENT.

Si l'angle donné eſt droit ou obtus, on connoît par cela ſeul l'eſpéce des deux autres, puiſqu'ils doivent pour lors (*Th.* 21.) être tous deux aigus.

Il faut auſſi remarquer que les petites lignes qui ſont dans la figure, marquent les angles & les côtés que l'on connoît.

PROBLEME XIX.

Deux angles d'un triangle rectiligne, avec un de ſes côtés, étant donnés, trouver le troiſiéme angle avec les deux autres côtés.

SOLUTION.

Premiérement, puiſque (*Th.* 21.) les trois angles d'un triangle ſont toûjours égaux à deux droits, ou à 180 degrés, ſi l'on ôte de 180 les angles donnés, ce qui reſtera exprimera la valeur du troiſiéme angle que l'on cherche. Tab. 19. Fig. 3.

Secondement, puiſque (*Th.* 40.) le ſinus de l'angle *C* eſt au côté oppoſé *AB* donné, comme le ſinus de l'angle *B* donné, eſt au côté oppoſé *AC*; de même auſſi le ſinus de l'angle *A* trouvé, doit être au côté *BC* qui lui eſt oppoſé. Et par conſéquent, ſi l'on diviſe par le ſinus de l'angle *C*, le produit du côté *AB* par le ſinus de l'angle *B*, qui ſont les moyens termes de la premiére analogie, l'on aura pour quotient le côté *AC*. Après cela, ſi par le moyen de la même régle de trois on diviſe le produit du côté *AB* & du ſinus de l'angle *A*, moyens termes de la ſeconde analogie, par le ſinus de

l'angle *C* premier terme de cette analogie ; l'on aura auſſi pour quotient le troiſiéme côté *BC*, & ainſi l'on trouvera tous les angles & tous les côtés du triangle propoſé.

PROBLEME XX.

Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, trouver tous ces angles.

SOLUTION.

Tab. 19. Fig. 4. Que le plus grand des côtés donnés *AB*, *BC*, & *AC* du triangle propoſé *ABC*, ſoit *BC*; mais (*Th.* 41.) le plus grand côté *BC* eſt à la ſomme donnée des deux autres *AB* & *AC*, comme la différence donnée, à la différence des ſegmens *BD* & *DC* faits par la perpendiculaire *AD*. Donc (*Lem.* 1. *prop.*) Si on multiplie la ſomme des côtés *AB* & *AC* par leur différence, & qu'on diviſe par le côté *BC* le produit de ces termes moyens de l'analogie préſente; l'on aura pour quotient, le quatriéme terme que l'on cherche ; c'eſt-à-dire, la différence des ſegmens *BD* & *DC*. Donc ſi après avoir trouvé cette différence on l'ôte du côté *BC*, & qu'on coupe par la moitié ce qui reſte, la moitié qui en réſultera ſera le petit ſegment *DB*.

Par ce moyen on connoîtra dans le triangle *ADC*, les deux côtés *AC* & *DC* avec l'angle droit *D* oppoſé à l'un de ces côtés. Donc (*Probl.* 18.) on connoîtra auſſi l'angle *DAC*; & par conſéquent ſi l'on ôte cet angle & l'angle droit, de 180 degrés, ce qui reſtera exprimera la valeur (*Th.* 22.) de l'angle *C*. L'on aura donc les deux angles *C* & *DAC*. L'on trouvera par le même moyen, les deux angles, *A* & *DBA* du triangle *ADB*, dont les deux côtés *AB* & *AD* ſont déja connus, avec l'angle droit *D* oppoſé à l'un de ces côtés *AB*. Donc par cette méthode, tous les côtés du triangle *ABC* étant donnés, on trouve tous les angles de ce même triangle.

PROBLEME XXI.

Deux côtés d'un triangle rectiligne, & l'angle compris entre ces côtés étant donnés, trouver les autres angles, & le troisiéme côté.

Tab. 19. Fig. 5.

SOLUTION.

Soit le triangle rectiligne *CBD*, dont on connoisse les deux côtés *CB* & *DB* avec l'angle *B* compris entre ces côtés, l'on demande les deux angles *C* & *D* avec le troisiéme côté *CD*.

Puisque les trois angles d'un triangle rectiligne sont toûjours égaux à deux droits (*Th.* 21.) ou bien à 180 degrés, si l'on ôte de ces 180 degrés, l'angle donné *B*, le reste sera la somme des angles *C* & *D*, & par conséquent l'on aura leur demi-somme, dont on trouvera dans les tables la tangente, parce que (*l'hyp.*) les deux côtés *BC* & *BD* étant donnés, l'on connoîtra leur somme & leur différence. Mais (*Th.* 42.) comme la somme des côtés *BC* & *BD*, est à leur différence, de même la tangente de la demi-somme des angles *D* & *C*, qui sont opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence. Donc si l'on divise le produit des moyens termes de cette analogie, c'est-à-dire, le produit de la différence des côtés *CB* & *BD*, & de la tangente de la demi-somme des angles *C* & *D*, qui sont opposés à ces côtés, par la somme de ces mêmes côtés, qui est le premier terme de l'analogie; l'on aura pour quotient le quatriéme terme, qui est la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles *C* & *D*; laquelle tangente cherchée dans les tables, donnera cette demi-différence : qu'on ajoûte ensuite cette demi-différence à la demi-somme des angles *C* & *D*, & (*Lem.* 5.) l'on aura le plus grand de ces deux angles.

Comme (*l'hyp.*) les côtés *BC* & *BD* sont donnés, l'on connoît quel est le plus grand, & par conséquent (*Th.* 23.) l'on connoît aussi quel est le plus grand angle qui est déja connu. Donc dans le triangle *BCD* l'on connoît deux an-

gles avec deux côtés. Donc (*Probl.* 19.) l'on connoîtra le troiſiéme angle & le troiſiéme côté. Ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME XXII.

Tab. 19. Fig. 6. & 7. Dans un triangle rectiligne, deux angles avec un côté, ou deux côtés avec un angle étant donnés, ou bien tous les côtés, trouver ſa hauteur.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC* dont on cherche la hauteur; deux de ces angles & un côté, ou deux de ces côtés & un angle, ou bien tous ſes côtés étant donnés, qu'on ſe ſerve de quelqu'un des Problêmes 18, 19, 20; dans leſquels les mêmes choſes ſont données, & par le moyen de ce Problême qu'on cherche le côté *AB* avec l'angle adjacent *A*, s'il n'eſt pas donné. L'on aura par ce moyen dans le triangle *ABD* deux angles, ſavoir l'angle *A* donné ou trouvé, & l'angle droit *D* avec le côté *AB*. Donc (*Probl.* 19. on connoîtra le côté *BD* qui eſt la hauteur que l'on cherchoit.

PROBLEME XXIII.

Tab. 19. Fig. 8. Approcher à l'infini de la valeur rectiligne d'un arc de cercle.

SOLUTION.

Soit l'arc *HKL* plus petit que le demi-cercle, dont la corde ſoit *HL*; qu'on méne la ligne *HA* qui touche l'arc dans le point *H*, & que l'angle *HLA* ſoit droit; que la ligne droite *HG* diviſe l'arc *HL* par la moitié dans le point *K*, & qu'elle rencontre la ligne droite *LA* dans le point *G*; que l'angle *HGB* ſoit droit, & que *HF* diviſe l'arc *HK* par la moitié en *S*, & qu'elle rencontre la ligne *GB* en *F*; que l'angle *HFC* ſoit droit, & ainſi des autres à l'infini: Je dis que l'arc propoſé *HKL* eſt plus grand que *HL* & plus petit que *HA*; plus grand que *HG*, plus pe-

tit que *HB*; encore plus grand que *HF* & plus petit que *HC*, &c.

DEMONSTRATION.

Qu'on méne la ligne droite *LR* qui touche le cercle dans le point L, & qui rencontre la ligne *HA* dans le point *R*; qu'on méne par le point *K* la ligne *KY* paralléle à la ligne *GB*, & la ligne *KT* perpendiculaire à la ligne *HL*, qui paſſera par le centre & diviſera la ligne *HL* par la moitié dans le point *T*.

Premiérement, il eſt évident (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) que l'arc *LKH* eſt plus grand que ſa corde ou ſoûtendante *LH*; il eſt auſſi plus petit que *HA*, car les angles *AHX* & *HLX* (*par le Cor.* 5. *Th.* 11. *& par le Cor.* 3. *Th.* 18.) ſont des angles droits, & l'angle *X* eſt commun aux deux triangles *AXH*, & *HXL*. Donc les angles *A* & *LHX* (*par le Cor.* 4. *Th.* 21.) ſont égaux entr'eux. De plus, à cauſe des tangentes *LR* & *RH* (*Cor.* 3. *Th.* 39.) égales entr'elles, les angles *RLH* & *RHL* (*Th.* 22.) ſont auſſi égaux entr'eux, & par conſéquent ſi on ôte ces angles, des angles droits *ALH* & *AHX*, les reſtes ſeront égaux, ſavoir *ALR* = *LHX* = *A*. Donc (*Th.* 22.) *RA* = *RL* = *RH*, & par conſéquent toute la ligne *AH* = *RL* + *RH* > que *HKL*. Donc l'arc *HKL* eſt plus petit que la ligne droite *HA*.

Puiſque la ligne *TK* eſt paralléle à la ligne *LG*, & (*Th.* 13.) *HT* = *TL*, *HK* ſera (*Th.* 29.) = *KG*; mais par le raiſonnement précedent, on peut démontrer que *HK* eſt plus petit que l'arc *HSK*. Donc le double de *HK*, ſavoir, *HG* eſt plus petit que le double de l'arc *HSK*, ſavoir, *HKL*.

Mais puiſque les lignes *GB* & *KY* ſont paralléles, & que *HK* = *KG*, *BY* ſera (*Th.* 29.) = *HY*. Or *HY* eſt plus grand que l'arc *HSK*; car en menant la ligne *KO* qui touche le cercle dans le point *K*, les angles *OHK* & *OKH* (*Cor.* 3. *Th.* 39. *& Th.* 22.) ſont égaux entr'eux. Mais parce que, par la conſtruction, *HKY*

eſt un angle droit, $OHK + OYK$ ſeront auſſi égaux aux angles $OKH + OKY$. Donc en ôtant les angles égaux OHK, OKH, les angles OYK, & OKY qui reſteront, ſeront auſſi égaux ; & par conſéquent (*Part.* 2. *Th.* 22.) $OK = OY$, & ainſi $HY = HO + OK$ ⌒ que HSK; ce que l'on peut démontrer de la même maniére que l'on a démontré que la ligne HA étoit plus grande que l'arc HKL. On peut en continuant cette même démonſtration, faire voir que l'arc HKL tient toûjours le milieu entre HF & HC; & enfin (*aprés avoir coupé par la moitié une infinité de fois les arcs* HKL *&* HSK,) l'arc HKL ſera égal à chacune de ces deux lignes qui ſeront confonduës & réduites à la même. Donc, par cette méthode, plus on multiplie ces opérations, plus auſſi l'on approche de la valeur rectiligne de l'arc propoſé.

PROBLEME XXIV.

Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, acceſſibles par une extrêmité ſeulement, comme la diſtance du point B au point A. Tab. 19. Fig. 9.

SOLUTION.

Après avoir placé le centre du demi cercle dont on ſe ſert pour meſurer toutes ſortes de diſtances, dans le point B, il faut diriger ſon diamétre vers A, enſuite il faut diriger la régle mobile autour du centre B vers tel endroit qu'on voudra, par exemple vers C, & après avoir pris à volonté & meſuré BC, qu'on tranſporte le centre de l'inſtrument en C, qu'on dirige ſon diamétre vers B & la régle mobile vers A.

Pour lors l'inſtrument (*Th.* 16.), dans les deux ſtations, fera connoître les angles C & B du triangle ABC; l'on connoît de plus le côté BC que l'on a pris à volonté. Donc dans ce triangle deux angles avec un côté ſont donnés : donc, (*Probl.* 19.) l'on connoîtra le côté AB cherché.

PRO-

PROBLEME XXV.

Mesurer toutes sortes de distances en long, large, ou profond, inaccessibles, ou bien la distance qui est entre deux points, par exemple *A* & *B*, dont on ne sauroit approcher. Tab. 19. Fig. 10.

SOLUTION.

Qu'on observe de deux endroits pris à volonté, les angles *ACB*, *BCD*, *ADC*, *ADB*. Cela étant fait, comme l'on connoît *CD* pris à volonté, l'on aura deux angles avec le côté *CD* auquel ils sont adjacens, dans les triangles *ACD*, *ACB*. Donc (*Probl.* 19.) l'on aura aussi les deux côtés *AD* & *BD*, avec l'angle *ADB* compris entre ces côtés, & (*Probl.* 21.) l'on trouvera le côté *AB*, qui est la distance que l'on cherche.

PROBLEME XXVI.

Déterminer par où passe une ligne droite, dont on ne voit que deux points, qui en sont les extrémités.

SOLUTION.

Soit la ligne droite *AB* dont on ne voit que les extrêmités *A* & *B*, l'on demande par où passe cette ligne. Tab. 19. Fig. 11.

Il faut placer le demi cercle, qui est l'instrument dont on se sert pour mesurer toutes sortes de distances, où l'on voudra, pourvu que ce soit dans un endroit d'où l'on voye les deux extrêmités *A* & *B* de la ligne *AB*, par exemple en *C*, ensuite il faut observer l'angle *ACB*, avec les distances *CA* & *CB*, que l'on connoîtra (*Probl.* 24.): les deux côtés *AC* & *BC* avec l'angle *ACB* compris entre ces côtés étant connus, l'on connoîtra (*Probl.* 25.) les angles *A* & *B*, avec le côté *AB* du triangle *ACB*. Après cela qu'on marque avec des bâtons ou des piquets, les endroits *G*, *H* entre les obstacles au travers desquels, passe la ligne *AB*, & qu'on observe les angles *ACG*, *GCH*, *HCB*; par ce moyen l'on connoîtra

premiérement, dans le triangle *CAG*, le côté *AC* avec les deux angles adjacens *CAG*, & *ACG*. Donc (*Probl.* 19. & 24.) l'on connoîtra auſſi les côtés *AG*, & *GC*, avec l'angle *AGC* compris entre ces côtés, & par conſéquent (*Th.* 1.) ſon complement *CGH* a deux droits; & ainſi l'on connoîtra encore dans le triangle *HGC*, le côté *GC* avec les deux angles adjacens, & par conſéquent (*Probl.* 19 & 24.) les côtés *GH* & *HC*, avec l'angle *GHC* compris entre ces côtés, & ainſi des autres points, comme *G*, *H*, qu'il faut trouver dans la ligne droite *AB*. On pourra donc par cette méthode, trouver tous les points par leſquels paſſe, au travers de pluſieurs obſtacles, la ligne droite *AB*, dont on ne voit que les extrêmités *A* & *B*.

AVERTISSEMENT.

Voilà ce qui regarde les dimentions des lignes droites, c'eſt-à-dire, la longimétrie; nous allons maintenant paſſer à la planimetrie, qui enſeigne à meſurer les ſurfaces.

CHAPITRE SECOND.

De la méſure des ſurfaces rectilignes.

DEFINITION XXVII.

Tab. 20. Fig. 1. UN polygone régulier eſt celui dont tous les côtés & tous les angles ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE I.

Si l'on coupe donc par la moitié tous les angles du polygone régulier *ABCDE*, par les lignes droites *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, *EF*, elles ſe réuniront toutes dans le point *F* qui eſt également diſtant de tous ces angles; car comme par ce moyen, on fait autant de triangles iſoſcéles, que le polygone a de cotés; les lignes droites *AF*, *BF*, (*Th.* 22.) ſeront égales entr'elles, & par conſéquent ſe réuniront dans le point *F*. Donc le point *F* eſt

également distant de tous les angles du polygone régulier *ABCDE*. L'on appelle ce point *F*, le centre du polygone, & les lignes *AF*, *BF*, rayons.

COROLLAIRE II.

Donc tous les angles qui sont au centre d'un polygone régulier, sont égaux ; car puisque (*Cor.* 1.) les triangles *AFB*, *BFC*, *CFD*, &c. ont des angles égaux à leur base, les angles au sommet *F* doivent aussi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) être égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Donc puisqu'il y a autant d'angles au centre, qu'il y a de côtés dans le polygone, la somme de tous ces angles, ou (*Cor.* 3. *Th.* 1.) la somme de quatre angles droits, divisée par le nombre des côtés du polygone, donnera pour quotient la valeur d'un chacun, si le polygone est régulier.

COROLLAIRE IV.

Toutes les lignes droites menées du centre d'un polygone régulier, à tous ses angles, les divisent en deux parties égales, & par conséquent les angles qui sont à la base *AB*, du triangle isoscéle *AFB*, sont ensemble égaux à l'angle *ABC* du polygone.

COROLLAIRE V.

Donc (*Th.* 21.) l'angle qui est à la circonférence, & l'angle qui est au centre du polygone régulier, sont égaux à deux droits, & par conséquent l'un des deux étant donné, l'on trouve facilement l'autre.

COROLLAIRE VI.

De plus (*Th.* 40.) comme le sinus de l'angle du centre, par exemple, *AFE* est au côté *AE* ; de même le sinus de l'angle *AEF*, qui est la moitié de celui qui est à la circonférence, est au côté *AF* ; & ainsi (*Lem* 1.) dans

un polygone régulier, si l'on divise le produit d'un côté & du sinus de la moitié de l'angle qui est à la circonférence, par le sinus du centre, le quotient sera le rayon ; ou bien si on divise le produit du rayon & du sinus de l'angle du centre, par le sinus de la moitié de l'angle qui est à la circonférence, le quotient sera le côté du polygone.

PROBLEME XXVII.

Le nombre des côtés d'un polygone régulier étant donné, trouver l'angle du centre.

SOLUTION.

Qu'on divise quatre angles droits ou 360 degrés par le nombre des côtés du polygone donné, & le quotient sera l'angle du centre ; cela est évident (*Cor.* 3. *Définition précédente.*)

COROLLAIRE I.

Donc dans un triangle régulier ou équilatéral, l'angle du centre sera le tiers de quatre droits ; dans un quarré, le quart ; dans un pentagone, un cinquiéme, dans un héxagone un sixiéme, &c.

COROLLAIRE II.

Donc (*Cor.* 5. *Déf.* 27.) dans un triangle régulier, l'angle qui est à la circonférence, est $\frac{1}{2}$ de l'angle qui est au centre ; dans un quarré, l'angle de la circonférence est égal à l'angle du centre ; dans un pentagone $1\frac{1}{2}$; dans un héxagone 2, ou le double ; dans un heptagone $2\frac{1}{2}$; dans un octogone 3 ou le triple, & ainsi à l'infini en progression arithmétique ; c'est-à-dire, que si l'on prend les angles qui sont au centre d'un polygone régulier, pour des unités, les angles qui sont à la circonférence de ces mêmes polygones, en commençant par le triangle régulier, sont aux angles du centre dans le rapport suivant : $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3.

PROBLEME XXVIII.

Construire un triangle isoscéle, dont chaque angle à la

baſe, ſoit le double de celui qui eſt au ſommet.

SOLUTION.

Qu'on diviſe, en *G* la ligne *AB* priſe à volonté, de maniére que *AB*· *AG* :: *AG*· *GB* (*par le Probl.* 16.) que des points *A* & *B* pris pour centres, on décrive des arcs de cercles qui ayent pour rayons *AB* & *AG* & qui ſe coupent en *C*, qu'on méne enſuite les lignes *AC* & *BC*: Je dis que le triangle *BAC* eſt le triangle que l'on cherche, dont les angles à la baſe *BC* ſont chacun le double de l'angle au ſommet *A*. Tab. 20. Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Qu'on joigne les points *G* & *C* par la ligne *GC*; puiſque (*par la conſtruction*) *AB*· *AG* ou *BC*:: *AG* ou *BC*· *GB*, les triangles *ABC*, *CBG* ont des côtés proportionnels autour du même angle *B*. Donc (*Cor.* 2. *Th.* 29.) ils ſont ſemblables, ou l'angle *BCG* eſt égal à l'angle *A*, & l'angle *CGB* égal à l'angle *ACB*; mais parce que (*par la conſtruction*) *AC* = *AB*, l'angle *ACB* eſt (*par le Th.* 22.) = à l'angle *B*. Donc l'angle *CGB* eſt auſſi égal au même angle *B*, & ainſi (*Th.* 22.) *GC* = *BC* (*l'hyp.*) = *AG*. Donc (*Th.* 22.) l'angle *A* eſt auſſi égal à l'angle *ACG*; & par conſéquent (*Cor.* 5. *Th.* 21.) l'angle *CGB* comme externe par rapport au triangle *AGC*, eſt le double de l'angle *A*. Donc puiſque les angles *ACB* & *B* ſont, comme on l'a déja démontré, égaux chacun à l'angle *CGB*, ils ſeront auſſi chacun le double du même angle *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXIX.

Dans le cercle donné *ABC*, décrire un triangle rectiligne *ABC* équiangle au triangle donné *DEF*. Tab. 20. Fig 3.

SOLUTION.

Qu'on méne la ligne *GH* (*Probl.* 11.) qui touche le cercle donné dans le point *A*; qu'on faſſe enſuite (*Probl.* 3.) l'angle *HAC* = à l'angle *E*, & l'angle *GAB* = à l'angle *F*; qu'on joigne après cela les points *B* & *C* par la ligne

BC: Je dis que le triangle *ABC* eſt ce que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

L'angle *B* eſt (*Th.* 18.) = *HAC* (*l'hyp:*) = *E*. De même l'angle *C* = *GAB* (*l'hyp.*) = *F*. Donc l'angle *BAC* eſt auſſi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) = *D*; & ainſi le triangle *BAC* inſcrit dans le cercle, eſt équiangle au triangle donné *DEF*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXX.

Décrire dans un cercle donné, un pentagone régulier.

SOLUTION.

Tab. 20. Fig. 4. Qu'on faſſe (*Probl.* 28.) un triangle iſoſcéle *GFH* qui ait chacun de ſes angles à la baſe *GH*, double de l'angle au ſommet *F*; qu'on inſcrive enſuite (*par le Probl.* 29.) dans le cercle donné *ABCDE*, le triangle *CAD* équiangle au triangle *GFH*; qu'on coupe après cela les angles qui ſont à la baſe *CD* du triangle *CAD* (*par le Probl.* 4.) en deux parties égales, par les lignes droites *DB*, *CE*, qui rencontrent la circonférence du cercle dans les points *B* & *E*; qu'on joigne enfin par des lignes droites, *CB*, *DE*, *EA*, *AB*: Je dis que le pentagone régulier *ABCDE* ainſi conſtruit & inſcrit dans le cercle donné, eſt ce que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident, par la conſtruction du pentagone, que les angles *CAD*, *CDB*, *BDA*, *DCE*, *ECA* ſont égaux entre eux, & ainſi (*Th.* 18. *& Cor.* 6. *Th.* 10.) les arcs *DC*, *CB*, *BA*, *AE*, *ED* ſont auſſi égaux, de même que leurs cordes. Donc le pentagone *ABCDE* eſt équilatéral, & (*Th.* 18.) équiangle. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit auſſi bien que de la démonſtration de la ſolution du Problême 28. que ſi l'on diviſe la ligne droite

AC en deux parties, comme on l'a enſeigné dans le problême 16. telles que toute la ligne ſoit à l'une de ces parties, comme cette même partie eſt à l'autre, la plus grande partie ſera un côté du pentagone *ABCDE* qu'il faut inſcrire dans le cercle. L'on peut dire la même choſe des autres côtés *BD*, *CE*, *AD*, que du côté *AC*; parce que ces grandes cordes (*Cor. 6. Th.* 10.) ſont égales entre elles.

COROLLAIRE II.

Puiſque les arcs qui ont pour ſoûtendantes, les côtés du pentagone régulier inſcrit dans le cercle, ſont égaux; ſi on les diviſe chacun par la moitié (*Probl.* 4.); il eſt conſtant que leurs moitiés au nombre de dix, auront autant de ſoûtendantes ou cordes (*Cor. 6. Th.* 10.) égales, qui compoſeront un décagone équiangle & équilatéral inſcrit dans le même cercle.

PROBLEME XXXI.

Décrire ſur une ligne droite donnée, un pentagone régulier. Tab. 20. Fig. 5.

SOLUTION.

Soit la ligne droite *AB*, coupée en *G* (*Probl.* 16.) en deux parties, telles que toute la ligne *AB* ſoit à la grande partie, comme cette grande partie eſt à la petite; c'eſt-à-dire, *AB*. *AG* :: *AG*. *GB*; qu'on prolonge cette même ligne des deux côtés en *C* & *D*, de ſorte que *AC*, & *BD* ſoient chacune égale à *AG*; enſuite des points *C* & *A*, *B* & *D* pris pour centres qu'on décrive des arcs de cercle dont *AB* ſoit rayon, qui ſe coupent dans les points *E* & *F*; que de ces mêmes points pris pour centre, on décrive d'autres arcs de cercle dont *AB* ſoit auſſi rayon, & qui ſe coupent dans le point *H*; qu'on méne après cela les lignes droites *AE*, *EH*, *HF*, *FB*: Je dis que la figure *ABFHE* eſt le pentagone cherché.

DEMONSTRATION.

Il eſt conſtant, 1°. Par la conſtruction de ce pentagone, que tous ſes côtés ſont égaux ; & voici comment l'on peut démontrer que tous ſes angles ſont auſſi égaux entre eux.

Puiſque (*par la conſtruction*) $AB \cdot AG :: AG \cdot GB$, que $AC = AG$, & que EA & EC ſont chacune égale à la ligne AB ; le triangle CEA ſera (*Probl.* 28.) iſoſcéle & aura ſes angles à la baſe CA, chacun le double de l'angle au ſommet E : donc puiſque (*Th.* 21.) les trois angles du triangle, ſont égaux à deux droits, l'angle CEA ſera $\frac{1}{5}$ de deux angles droits ; c'eſt-à-dire $= 36$ degrés, & par conſéquent comme l'angle EAC eſt le double de cet angle CEA, il ſera de 72 degrés, qui ôtés de 180 valeur (*Th.* 1.) des deux angles qui ſont en A, l'angle EAB qui reſtera, ſera de 108 ; & ainſi les deux angles EAB, & FBA ſont égaux entre eux.

Il ſuit de là que le pentagone eſt équilatéral ; car ſi on conçoit ce pentagone achevé par le moyen des lignes égales aux côtés AB, EA, BF, qui tombent des points E & F vers H ; ces lignes doivent néceſſairement ſe réunir en H ; car ſi elles tomboient deſſus ou deſſous le point H du pentagone équiangle, elles ſeroient (*Cor.* 8. *Th.* 7.) plus grandes, ou plus petites que les lignes EH & FH, & par conſéquent elles ne ſeroient pas égales aux autres côtés du pentagone, ce qui eſt contre l'hypothéſe. Donc le pentagone $ABFHE$ eſt équilatéral & équiangle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXII.

Inſcrire un héxagone dans un cercle donné.

SOLUTION.

Tab. 20. Fig. 6. Soit le cercle AEC dans lequel il faut inſcrire un hexagone. Qu'on coupe les arcs AB, BC, CD dont les ſoûtendantes ſoient égales au demi diamétre ; enſuite des points A, B, C, qu'on méne les diamétres AD, BE, CG, qui rencontrent

contrent la circonférence du cercle dans les points *D*, *E*, *G*; qu'on méne après cela les cordes *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EG*, *GA*; je dis que la figure rectiligne *ABCDEG* eſt l'héxagone cherché.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident, par la conſtruction des triangles *AFB*, *BFC*, &c. que chacun d'eux eſt équilatéral, & par conſéquent auſſi équiangle (*Cor.* 2. *Th.* 22. ou *Th.* 21.) les angles *AFB*, *BFC*, &c. au centre, ſont chacun de 60 degrés. Donc les trois *AFB*, *BFC*, *CFD* font 180 degrés, ou rempliſſent le demi-cercle *ABCD*. De même dans l'autre demi-cercle *DEGA*, il y a trois triangles équilatéraux, ſemblables aux trois dont on vient de parler. Donc l'héxagone *ABCDEG* a tous ſes côtés & tous ſes angles égaux; car ils ſont chacun le double de 60 degrés, c'eſt-à-dire, égaux à 120 degrés. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 10. Fig. 6.

COROLLAIRE.

Donc les côtés d'un héxagone, ſont égaux aux rayons du cercle dans lequel il eſt inſcrit.

PROBLEME XXXIII.

Décrire un héxagone ſur une ligne droite donnée.

SOLUTION.

Que des points *A* & *B* de la ligne donnée *AB*, pris pour centre, on décrive des cercles dont *AB* ſoit rayon, qui ſe coupent en *F*. Il eſt évident (*par la conſtruction*) que le triangle *ABF* eſt équilatéral. Qu'on faſſe de la même maniére ſur les lignes *AF* & *FB*, des triangles équilatéraux *AGF*, *BFC*, & après avoir prolongé *AF* & *FB* juſques à *D* & *E*, de ſorte que *EF* & *FD* ſoient chacune égale à *AB*, qu'on joigne *GE*, *ED*, *DC*: Je dis que la figure *ABC DEG* eſt l'héxagone cherché. Tab. 10. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

Les triangles *AFB*, *AFG*, *BFC* ſont (*par la conſtruc-*

tion) équilatéraux; ils ont donc (*Cor.* 2. *Th.* 22. *& Th.* 21.) chacun de leurs angles, égal au tiers de deux droits, ou à 60 degrés, & ainſi leurs angles en *F*, ſont enſemble égaux à deux droits, & la ligne *GFC* (*Th.* 2.) eſt droite. Donc puiſque (*l'hyp.*) les lignes *AFD*, & *BFE* ſont droites, les angles *GFE*, *EFD*, *DFC* qui ſont oppoſés au ſommet aux angles en *F* des trois triangles *AFB*, *AFG*, *BFC*, leur ſont auſſi égaux (*Th.* 3.), & pris enſemble valent deux droits. Ils ſont donc chacun le tiers de deux droits: & par conſéquent, puiſque (*par la conſtruction*) les triangles *GFE*, *EFD*, *DFC* ſont iſoſcéles, & ainſi (*Th.* 22.) ont des angles à leurs baſes *GE*, *ED*, *DC*, égaux, ils ſont auſſi (*Th.* 21.) chacun le tiers de deux droits, ou bien ces triangles ſont équangles. Donc (*Cor.* 4. *Th.* 22.) ils ſont auſſi équilatéraux. D'où il ſuit que les ſix triangles autour du point *F*, ſont équiangles & équilatéraux. Donc les côtés de la figure *ABCDEG*, & ſes angles ſont égaux, & par conſéquent cet héxagone eſt régulier. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXIV.

Tab. 20. Fig. 8. Décrire dans le cercle donné *ADLK* au quindécagone régulier.

SOLUTION.

Inſcrivez (*Probl.* 29.) le côté *AD* d'un triangle équilatéral, & (*Probl.* 30.) le côté *AC* d'un pentagone; coupez enſuite (*Probl.* 4.) l'arc *CD* en *E*: la ſoûtendante de ſa moitié, ſavoir *ED* ou *CE* eſt le côté du quindécagone cherché.

DEMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe que toute la circonférence du cercle, eſt diviſée en quinze parties égales, il eſt conſtant que l'arc *ACD* qui a (*l'hyp.*) pour ſoûtendante le côté *AD* du triangle équilatéral, eſt égal à cinq de ces parties, & l'arc *AC* qui a (*l'hyp.*) pour ſoûtendante, le côté *AC* du pentagone régulier, eſt égal à trois; & par conſéquent que la dif-

férence *CD* de ces deux arcs, eſt de deux de ces parties dont il y en a quinze dans toute la circonférence. Donc la moitié *EC* ou *ED* de cette différence *CD*, eſt la quinziéme partie de toute la circonférence *ADLK*. Ainſi la corde eſt le côté du quindécagone que l'on cherche. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXV.

Premiérement, décrire dans un cercle donné, un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra.

Secondement, décrire un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra ſur une ligne droite donnée.

SOLUTION DE LA PREMIERE PARTIE.

Qu'on diviſe (*Probl.* 8.) le cercle donné en autant de parties égales qu'il y a de côtés dans le polygone que l'on cherche, & qu'on méne les lignes droites ſoûtendantes de ces arcs; il eſt conſtant (*Cor.* 2. *Th.* 18. *&* *Cor.* 7. *Th.* 10.) que ces lignes compoſeront le polygone régulier que l'on cherche.

SOLUTION DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne donnée *AB* ſur laquelle il faut décrire un polygone régulier. Après avoir trouvé (*Cor.* 2. *Probl.* 27.) l'angle à la circonférence de ce polygone; qu'on décrive du point *A* pris pour centre, l'arc *BDK* dont *AB* ſoit rayon, qu'on coupe de cet arc la partie *BD*, d'autant de degrés & minutes que l'angle de la circonférence en renferme, par exemple 120 dans un héxagone, depuis *B* juſques à *D*; & ainſi l'on aura *AD* = à la ligne donnée *AB*, avec laquelle elle fera l'angle *BAD* de la circonférence du polygone cherché. Qu'on faſſe enſuite la même choſe dans le point *B*; mais cela ſera plus facile ſi du point *B* pris pour centre, l'on décrit l'arc *E*, dont *AB* ſoit rayon, & du point *A*, un autre arc, dont *BD* ſoit rayon, & qui coupe le premier en *E*; qu'on méne enſuite la ligne droite *BE*. Qu'on décrive de même du point *D*, l'arc *H* dont *AD* ſoit rayon,

Tab. 20. Fig. 9.

& du point *A*, un arc dont *AE* ſoit rayon, qui coupe l'autre dans le point *H*, l'on aura par ce moyen le point *H*, & de la même maniére le point *G*, &c. juſques au polygone entier que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

L'angle *BAD* eſt (*par la conſtruction.*) de 120 degrés, tel que (*Cor.* 2. *Probl.* 27.) ſont les angles à la baſe de l'héxagone, & les côtés *AD* & *AB* ſont égaux. Donc le point *B* appartient à cette figure. Le point *E* par la même raiſon, eſt auſſi un des points de cette figure; car puiſque dans les triangles *ABE* & *BAD*, les côtés ſont égaux les uns aux autres, les angles *DAB*, & *ABE* ſont auſſi (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux, par conſéquent l'angle *ABE* convient à ce polygone; & ainſi des autres. Donc ce polygone a ſes côtés & ſes angles égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXVI.

Tab. 19. Fig. 6. Dans un triangle rectiligne, deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin tous les côtés étant donnés, trouver l'aire du triangle.

SOLUTION.

Après avoir trouvé la baſe *AC* du triangle propoſé *ABC*, par quelqu'un des problêmes 18, 19, 20, 21; qu'on cherche (*Probl.* 22.) la hauteur *BD* de ce même triangle, enſuite qu'on multiplie la baſe *AC* par la moitié de la hauteur *BD*, ou la hauteur par la moitié de la baſe, le produit ſera l'aire cherchée du triangle propoſé.

PROBLEME XXXVII.

Tab. 10. Fig. 10. Trouver l'aire de toutes ſortes de figures rectilignes.

SOLUTION.

Soit l'aire propoſée *ABCDE*. Il faut premiérement obſerver les côtés avec les angles de cette figure; enſuite diviſer l'aire en triangles. Cela étant fait; puiſqu'on connoît

dans le triangle *ABC*, les deux côtés *AB* & *BC* avec l'angle *B*, l'on trouvera (*Probl.* 21.) la baſe *AC* avec les angles adjacens, & après avoir ôté l'angle *BAC* de l'angle connu *BAE*, il reſtera l'angle auſſi connu *CAE* avec les côtés *AC* & *AE*, entre leſquels cet angle eſt compris; l'on connoîtra auſſi (*Probl.* 21.) les angles & les côtés du triangle *CAE*, & ainſi des autres. Les angles & les côtés des triangles étant connus, l'on trouvera (*Probl.* 36.) l'aire de chaque triangle, & par conſéquent l'aire cherchée de la figure rectiligne *ABCDE* compoſée de ces triangles.

Si la figure dont on veut connoître l'aire, eſt inacceſſible, il faut chercher (*Probl.* 25.) tous les côtés de ces triangles, comme des diſtances inacceſſibles, leſquels étant connus, l'on trouvera (*Probl.* 36) l'aire de ces mêmes triangles, & la ſomme de ces aires, ſera l'aire cherchée.

PROBLEME XXXVIII.

Faire des Cartes Topographiques. Tab. 10. Fig. 11.

SOLUTION.

S'il faut repreſenter ſur le papier pluſieurs endroits, par exemple, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*; qu'on choiſiſſe deux ſtations telles qu'on voudra, comme *I* & *H*, & qu'on place l'inſtrument en *I*, de maniére que par le diamétre du demi cercle l'on puiſſe voir quelque marque au point *H*. L'inſtrument étant ainſi diſpoſé, il faut diriger la régle mobile vers chacun de ces endroits, obſerver tous les angles en *I*, & écrire le nombre des dégrés, qui ſont la meſure de chacun de ces angles, pour s'en ſouvenir. Cela étant fait, on tranſportera l'inſtrument à l'autre ſtation *H*, ayant pris une diſtance connuë du point *H* au point *I*, par exemple, de cent pas, d'une demi-lieue, &c.

L'inſtrument étant placé en *H*, de maniére que par le diamétre l'on voye la marque qu'on aura laiſſée dans la premiére ſtation *I*, la régle mobile fera connoître tous

les angles en H ; lesquels étant connus pourront facilement être transportés sur le papier par le moyen du cercle, ou du quart de cercle divisé en 90 degrés (*Probl.* 8.) en menant sur le papier la ligne IH, sur laquelle l'on fera les triangles IAH, IBH, ICH, &c. équiangles aux triangles qui sont sur le terrein & qui leur seront semblables. Ces endroits A, B, C, D, &c. seront representés dans les mêmes points sur le papier. L'on divisera la ligne IH pour servir d'échelle, en un nombre de parties, égal à celui qui est connu entre les deux stations prises à volonté I & H, & par ce moyen l'on aura une Carte qui representera la situation de ces endroits les uns par rapport aux autres, & leur distance.

DEMONSTRATION.

Puisque les triangles qui sont sur le papier sont (*l'hyp.*) équiangles à ceux qui sont sur le terrein, leurs côtés sont aussi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) dans le même rapport & la même situation sur le papier & sur le terrein. Donc la situation & la distance de ces endroits sur le terrein, sont representées sur le papier. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXIX.

Faire sur la terre & dans un point marqué d'une ligne donnée, un angle d'une grandeur déterminée.

SOLUTION.

Tab. 20. Fig. 12. Soit l'angle qu'il faut faire à l'extrémité A de la ligne AK, par exemple de 34 degrés. On place le centre du demi-cercle divisé en degrés, qui est l'instrument dont on se sert, dans le point A, de maniére que le diamétre soit dirigé selon la ligne donnée AK, & que l'on voye par les pinnules de ce diamétre, le bâton fiché en D ; ensuite il faut diriger la regle mobile AE, sur le point de l'instrument qui est éloigné de 34 degrés du point B, après cela il faut encore ficher un bâton en F, que l'on puisse voir par les pinnules de la regle AE ; il est constant (*Th.* 16.) que la li-

gne droite menée par les points *A* & *F*, fait un angle de 34 degrés avec la ligne donnée *AK*, & ainsi des autres.

Autre Méthode sans instrument.

SOLUTION.

Soit tel angle qu'on voudra, par exemple l'angle *B* proposé sur le papier, qu'il faut tracer sur la terre dans le point *A* de la ligne donnée *AK*. Qu'on méne la ligne droite *ED* qui joigne les deux côtés *BE*, *BD*, de l'angle donné sur le papier. Ensuite qu'on fiche des piquets dans le point *A* donné, & dans tel autre qu'on voudra, par exemple *K*, de la ligne *AK*, qu'on attache à ces deux piquets une corde par ses deux extrémités, & qu'elle soit divisée par le nœud *H* en deux parties *AH*, *HK*, qui soient à la ligne donnée *AK*, comme *BE* & *ED* sont à *BD*. Après cela qu'on tende, autant qu'on le pourra, la corde en tirant le nœud *H*, on fera par ce moyen le triangle *AHK* qui sera (*Cor.* 1. *Th.* 29.) semblable au triangle donné *BFD*; par conséquent l'angle *A* sera égal à l'angle *B*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 20. Fig. 12.

PROBLEME XL.

Mesurer un angle sur la terre.

PREMIERE SOLUTION.

Il faut placer le centre du demi-cercle dans le sommet de l'angle, & diriger le diamétre vers l'un de ses côtés, de maniére qu'on découvre par les pinnules, la marque qu'on y aura mise, ensuite il faut diriger la regle mobile vers l'autre côté dans lequel on voye aussi par les pinnules, la marque qu'ou y aura attachée; l'arc de l'instrument, compris entre la regle mobile & le côté du diamétre dirigé vers un des côtés de l'angle donné, sera (*par le Th.* 16.) la valeur de l'angle cherché. Tab. 21. Fig. 1.

Autre Solution ſans Inſtrument.

Après avoir meſuré les deux côtés *AB* & *AC*, de l'angle *BAC* qu'il faut meſurer ſur la terre, qu'on meſure auſſi la corde qui s'étend depuis *B* juſques à *C*, & ainſi on connoîtra les trois côtés du triangle *ABC*, & (*Probl.* 20.) tous les angles; par conſéquent l'angle *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLI.

Tab. 21. Fig. 2. Décrire ſur la terre un polygone régulier, un côté ou un rayon étant donné.

SOLUTION.

Il faut premiérement trouver (*Probl.* 37.) l'angle au centre du polygone cherché, & décrire (*Probl.* 39) un angle ſemblable *IAK*, & couper de ſes côtés les parties *AB* & *AH*, de telle grandeur qu'on voudra, enſuite mener la ligne droite *BH*: cette ligne ſera (*Def.* 27. *& ſes Cor.*) un des côtés du polygone cherché. Il faut après cela faire (*Probl.* 39.) un autre angle *BAC* ſemblable au premier *IAK*, & prendre la ligne $AC = AB$, & joindre les points *BC*: cette ligne ſera (*Déf.* 27. *& ſes Cor.*) le ſecond côté du polygone cherché, & ainſi des autres. Lorſque le pénultiéme côté *FG* ſera deſigné, l'intervalle *GH* qui reſtera, ſera néceſſairement égal à chacun des côtés, comme on peut le voir par ce que nous avons dit dans les problêmes 34 & 35, touchant la maniére de décrire des polygones. Si l'on demande une figure dont les côtés ſoient d'une longueur donnée, par exemple, un héxagone, dont chaque côté ſoit de 1000 pieds, il faut chercher par le moyen du côté donné (*Déf.* 27.) le rayon, & après l'avoir trouvé, décrire, comme on vient de l'enſeigner, la figure que l'on cherche, ſavoir un héxagone; tous ſes côtés ſeront égaux & de 1000 pieds.

Autre

Autre Méthode pour décrire un polygone ſans ſtation au centre de la figure.

SOLUTION.

Après avoir trouvé (*Cor. 6. Def. 27.*) l'angle à la circonférence du polygone que l'on veut décrire ; qu'on trace ſur la terre un angle *LEN* (*Probl. 39.*) qui lui ſoit égal ; enſuite, qu'on coupe de ſes côtés, les parties égales *EF* & *ED*, de telle grandeur qu'on voudra. Il faut après cela faire dans le point *D*, un angle (*Probl. 3.*) *EDC*, qui ſera le ſecond angle à la circonférence du polygone que l'on cherche, qui ſoit par conſéquent égal à l'angle *FED* ; & qu'on méne la ligne *DC* = *ED*. Qu'on faſſe la même choſe & qu'on opére de la même façon dans tout le circuit, lorſque le dernier côté *HG* aura été déſigné, l'intervalle qui reſtera ; *GF*, ſi l'on a bien operé, ſera égal aux autres côtés, & les angles *G* & *H* à la circonférence, ſeront égaux aux autres angles de la circonférence. Ce qui eſt encore évident par les problêmes 34. & 35. Tab. 21. Fig. 2.

PROBLEME XLII.

Décrire ſur la terre telle figure rectiligne qu'on voudra ; réguliére ou irréguliére, comme une ville, une citadelle, un château tel qu'il eſt repreſenté ſur le papier.

SOLUTION.

Tab. 21. Fig. 3.

Soit la figure *IKLMNO* que l'on veut tranſporter ſur la terre : il faut premiérement, par le moyen du quart de cercle, chercher tous les angles, & meſurer toutes les lignes, & après avoir écrit leur valeur, il faut opérer de la maniére ſuivante.

Si l'on veut que quelqu'angle de la figure, tombe ſur un certain point du terrein ſur lequel on veut tranſporter cette figure, il faut commencer par cet angle ; que ce point, par exemple, ſoit le point *O* : il faut ficher un piquet dans le

point *O* & compter autant de parties depuis *O* vers *I*, qu'on en a trouvé dans la ligne *OI*, & celà ſelon l'endroit par où on veut que paſſe la ligne *OI*. Enſuite qu'à l'extrémité *I*, on faſſe (*Probl.* 39.) l'angle marqué ſur le papier, & qu'on place l'inſtrument de telle ſorte que l'on puiſſe voir, par les pinnules de la regle immobile, le bâton fiché en *O*, & par celles de la regle mobile, un autre bâton fiché dans un des points que l'on découvre par les pinnules de cette regle, qui marque la valeur de l'angle. Il faut de même prendre autant de parties depuis *I* vers *K*, qu'il y en a de marquées ſur le papier, & faire dans le point *K* (*Probl.* 39.) un angle de la grandeur requiſe, & laiſſer un bâton fiché en *K*, & opérer de même dans toute la circonférence. Lorſqu'on ſera parvenu en *N*, qu'on place dans ce point *N*, l'inſtrument de façon que par une de ſes regles, on voye le bâton laiſſé en *M*, & par l'autre celui qui eſt en *O*, ſi pour lors l'angle de l'inſtrument, convient avec l'angle marqué ſur le papier, & la diſtance qui eſt entre *N* & *O* ſur la terre, meſurée par le moyen d'une corde, avec les parties marquées ſur le papier; la figure propoſée ſur le papier, a bien été tranſportée ſur la terre, autrement l'on s'eſt trompé, & il faut recommencer l'opération.

PROBLEME XLIII.

Tab. 21. Fig. 4. Tracer ſur le papier une figure rectiligne, par exemple, une ville, un château, une citadelle, &c.

SOLUTION.

Soit la ville dont le circuit eſt *ABCDEFGH*, qu'il faut placer & tranſporter ſur le papier. Après avoir fiché des bâtons dans tous les angles, ou quelqu'autres marques, il faut commencer par tel angle qu'on voudra, par exemple par l'angle *A*, où l'on place l'inſtrument, & l'on obſerve l'angle *HAB*. Enſuite on tranſporte l'inſtrument en *B*, & l'on meſure avec une corde la ligne *AB*, & après avoir obſervé l'angle *ABC*, on tranſporte l'inſtrument en *C*, & l'on meſure la ligne *BC*. On fait la même choſe dans tout

le circuit, juſques en *A* où l'on a commencé. L'on connoît par ce moyen tous les côtés & tous les angles de la figure, qu'il eſt facile après cela de tracer ſur le papier, en faiſant des angles égaux à ceux qu'on a obſervé dans la figure, & des côtés proportionnels aux côtés que l'on a meſurés.

On ſe ſert de la même méthode pour tracer des fortereſſes. Si elles ſont réguliéres, il ſuffit de meſurer trois lignes, la courtine *OP*, l'aîle *PQ*, & la face *QR* du baſtion, & trois angles, ſavoir l'angle *OPQ* de la courtine & de l'aîle, l'angle *PQR* de la face & de l'aîle, & l'angle *QRS* du baſtion; parce que la place étant ſuppoſée réguliére, tout le reſte eſt égal. Tab. 21. Fig. 5.

Si la place eſt irréguliére, il faut meſurer tous les angles & tous les côtés du circuit. Que ſi la place eſt inacceſſible, il faut ſe ſervir du problême 36.

AVERTISSEMENT.

Après avoir parlé de la maniére de meſurer & de tracer les ſurfaces rectilignes, il faut paſſer à ce qui regarde leur diviſion.

PROBLEME XLIV.

Diviſer un triangle rectiligne en deux, trois, & autant de parties égales qu'on voudra. Tab. 21. Fig. 6.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC*, qu'il faut diviſer en deux parties égales, par une ligne menée de l'angle *A* à la baſe *BC*. Qu'on diviſe (*Probl.* 9.) *BC* en deux parties égales en *D*, & qu'on méne la ligne droite *AD*; cette ligne diviſera le triangle propoſé en deux parties égales.

S'il falloit diviſer le triangle en quatre parties égales, il faudroit diviſer la ligne *BC* (*Probl.* 9.) en quatre parties égales, & du ſommet *A*, mener des lignes droites à tous les points de diviſion, comme on le voit dans la figure, & le triangle ſeroit ainſi diviſé en quatre parties égales.

Mais comme il arrive quelquefois, lorſqu'on diviſe en

pluſieurs parties un triangle, par des lignes menées du ſommet à tous les points de diviſion, que les ſegmens ſont très-petits, ce qui cauſe de l'embarras dans la diviſion des terres : voici une autre méthode qui n'eſt point ſujette à cet inconvénient.

Soit le triangle *ABC*, qu'il faut diviſer en cinq parties égales. Qu'on prenne dans les deux plus grands côtés, ſavoir dans le côté *BC*, la cinquiéme partie *BD*, & dans le côté *AC*, la quatriéme partie *AG* ; enſuite le tiers de *DC*, ſavoir *DF*, enfin la moitié de *GC*, ſavoir *EG* : qu'on méne après cela, les lignes droites *AD*, *DG*, *GF*, *FE*. Il eſt conſtant (*Scol. Th.* 27.) que le triangle propoſé *ABC* eſt par ce moyen diviſé en cinq parties égales, *BAD*, *ADG*, *DGF*, *GFE*, *FEC*.

PROBLEME LXV.

Tab. 21. Fig. 7. Diviſer un triangle en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans un des côtés, à un autre côté.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC* & le point donné *D* dans le côté *BC*. On demande une ligne menée du point *D*, qui diviſe en deux parties égales le triangle *ABC*. Si *D* diviſoit *BC* en deux parties égales, la ligne *AD* diviſeroit auſſi le triangle *ABC* par la moitié.

Mais ſi *D* ne diviſe point *BC* par la moitié, qu'on coupe le côté *BC* (*Probl.* 9.) en deux parties égales dans le point *E*, & qu'on méne (*Probl.* 2.) la ligne droite *EF* paralléle à la ligne *DA* : je dis que la ligne droite *DF* diviſe le triangle propoſé en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'Hyp.*) *BE* & *EC* ſont égales entre elles, la ligne droite *AE* (*Scol. Th.* 27.) coupe par la moitié le triangle *BAC* ; & *AD* & *EF* étant paralléles (*l'Hyp.*) le triangle *DFA* (*par le Cor.* 1. *Th.* 27.) eſt égal au triangle *DEA*. Donc en ajoûtant des deux côtés le triangle com-

mun DAB, on aura (*Ax.* 4.) $FDBA = EAB = EA$. Mais les triangles EAF, & FDE étant auſſi égaux, en ôtant de chaque côté EOF, les reſtes DEO & AFO ſeront auſſi égaux, & par conſéquent (*Ax.* 4.) $EAC = DFC$. Donc enfin (*Ax.* 6.) $FDBA = DFC$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVI.

Tab. 21. Fig 8.

Diviſer un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un point donné dans un des côtés.

SOLUTION.

Soit le triangle BAC qu'il faut diviſer en trois parties égales, par des lignes droites menées du point D donné dans le côté BC. Il faut diviſer (*Probl.* 9.) le côté BC en trois parties égales, BE, EF, FC, & mener les lignes droites AE, AD, AF; enſuite (*Probl.* 2.) mener les deux lignes EG & FH paralléles à la ligne AD; après cela ſi on méne les lignes DG & DH : je dis que DGB, $GDHA$, & HDC ſont trois parties égales du triangle propoſé BAC.

DEMONSTRATION.

Puiſque BE, EF, FC ſont (*l'hyp.*) égales entr'elles, les triangles BAE, EAF, FAC ſont auſſi (*Cor.* 1. *Th.* 27.) égaux. Puiſque AD & GE ſont paralléles (*l'hyp.*) les triangles GEA & GED ſont de même égaux, & par conſéquent en ôtant de chaque côté la partie GOE, les reſtes (*Ax.* 5.) DOE & GOA ſeront auſſi égaux. Donc ſi on ajoûte de part & d'autre le trapéze $EOGB$, on aura (*Ax.* 4.) les triangles DGB & EAB égaux entre-eux. L'on peut de même démontrer que les triangles DHC, & FAC ſont égaux. Donc puiſqu'on a déja fait voir que chacun des triangles EAB & FAC, eſt le tiers du triangle ABC; chacun des triangles DGB & DHC doit auſſi être le tiers du triangle propoſé; & par conſéquent le reſte $GDHA$ ſera de même la troiſiéme par-

tie du même triangle *BAC*. Donc par cette méthode, le triangle *BAC* ſera diviſé en trois parties égales *DGB*, *DHC*, & *GDHA*, par les lignes droites menées du point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVII.

Diviſer un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un côté à un autre, & de différens points.

SOLUTION.

Pour diviſer le triangle *ABC* comme on vient de le dire, il faut dans un côté, par exemple dans *AC*, choiſir les points *D* & *E*, & mener les lignes *BD* & *BE*, enſuite diviſer *AC* (*Probl.* 9.) en trois parties égales *AH*, *HI*, *IC*, & mener les lignes paralléles *HF* à *BD* & *IG* à *BE*; ſi après cela on méne les lignes *DF* & *EG*: je dis que ces lignes *DF* & *EG* diviſent le triangle propoſé *BAC* en trois parties égales *ABFD*, *DFGE*, *EGC*.

DEMONSTRATION.

En ménant les lignes *BH* & *BI*, il eſt conſtant, comme on l'a déja montré, que l'eſpace *BOF* = *DOH*, parce que *BD* & *HF* ſont paralléles (*l'hyp.*), & ainſi en ajoûtant de chaque côté *ADOB*; *ADFB* ſera = *AEH*. De même puiſque *BE* & *GI* ſont (*l'hyp.*) paralléles, *BPG* = *EPI*, & en ajoûtant de part & d'autre *HBPE*; *HBGE* ſera = *HBI*. Mais puiſque *BOF* = *DOH*, *HBGE* = (*Ax.*4.) *DFGE*. Donc *DFGE* eſt auſſi = *HBI*; & par conſéquent chaque eſpace *ADFB*, & *DFGE* eſt égal à chacun des triangles *ABH* & *HBI*, qui, parce que les lignes *AH*, *HI*, *IC* ſont égales entr'elles (*l'hyp.*) ſont chacun (*Cor.* 1. *Th.* 27.) le tiers de l'eſpace *BAC*. Donc les parties *ADFB*, & *DFGE* ſont auſſi chacune le tiers de ce même eſpace *BAC*, & par conſéquent le triangle *BAC* eſt diviſé en trois parties égales par les

lignes *DF* & *EG*, savoir, *ADFB*, *DFGE*, & *EGC*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVIII.

D'un angle donné *EAF*, par le point *D* donné dans un côté, couper un triangle égal au triangle donné *GHK*. Tab. 21. Fig. 10.

SOLUTION.

Qu'on méne la ligne *KL* (*Probl.* 1.) perpendiculaire à la base *GH* du triangle *GHK*, & *AM* perpendiculaire en *A* à la ligne *FA*; ensuite qu'on prenne *AC*. *KL* :: *GH*. *DA*, & que par le point *C* on méne (*Probl.* 2.) *CN* paralléle à la ligne *AF*, & qui coupe *AE* en *B*: je dis, que si ensuite on méne la ligne *BD*, le triangle *DBA* est égal au triangle donné *GHK*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne *BO* (*Probl.* 1.) perpendiculaire à *AD*, cette ligne *BO* sera la hauteur du triangle *ABD*, dont la base est *AD*. De plus, puisque *CO* est un parallélograme rectangle, *BO* sera aussi (*Th.* 26.) = *AC*; mais (*l'hyp.*) *AC*. *KL* :: *GH*. *DA*. Donc *BO*. *KL* :: *GH*. *DA*, & par conséquent (*Lem.* 1. *proport. part.* 1.) $BO \times DA = KL \times GH$. donc leurs moitiés sont aussi égales entr'elles, ou bien (*Scolie Th.* 27.) le triangle *ABD* est égal au triangle donné *GHK*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLIX.

De l'angle donné *ZAF* couper un triangle égal au triangle donné *X*, par une ligne menée du point *B* donné hors de l'angle. Tab. 21. Fig. 11. 12. & 13.

SOLUTION.

Il faut méner la ligne *BN* paralléle au côté *FA*, qui rencontre l'autre côté *ZA* prolongé en *N*; ensuite couper par le point donné *B* de l'angle *BNZ* (*Probl.*

48.) le triangle *BKN* égal au triangle donné *X*. Il faut après cela (*Probl.* 17.) tellement couper en *E* la ligne indéfinie *NZ*, que *NK*· *AE* :: *AE*· *NE*; ſi on méne après cela la ligne *BE* qui coupe *AF* en *G*: je dis, que le triangle *EAG* eſt égal au triangle donné *X*.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Conſtr.*) *NK*· *AE* :: *AE*· *NE*; *NK* × *NE* eſt (*Lem.* 1. *prop. part.* 1.) = *AE* × *AE*, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE* × *AE*· *NE* × *NE*:: *NK* × *NE*· *NE* × *NE* (*Ax.* 9.) :: *NK*· *NE*; mais puiſque (*Conſtr.*) *AF* & *NB* ſont paralléles, les triangles *GAE*, & *BNE* ſont (*Déf.* 5.) équiangles, ou (*Cor.* 1. *Th.* 29.) ſemblables entr'eux, & par conſéquent (*Cor. Th.* 30.) comme les quarrés *AE*×*AE*, *NE*×*NE*, des côtés homologues *AE*, *NE*. Puiſque les triangles *BNK* & *BNE* ont la même hauteur, ils ſont entr'eux (*Cor.* 2. *Th.* 28.) comme les baſes *NK* & *NE*. Donc les triangles *GAE* & *BNE* ſont entr'eux comme les triangles *BNK* & *BNE*, où les triangles *GAE* & *BNK* ſont en même raiſon avec le triangle *BNE*, & par conſéquent (*Cor.* 2. *Déf.* 17.) égaux entr'eux. Mais (*Conſtr.*) le triangle *BNK* eſt égal au triangle donné *X*. Donc le triangle *GAE* eſt auſſi égal à ce même triangle donné *X*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si le point *K* tombe en *A*, comme dans la figure 12. pour lors *NE* eſt tellement diviſé que *NK* ou *NA*: *AE* :: *AE*· *NE*, & par conſéquent les triangles ſeront (*Conſtr.*) ſemblables, & (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *BG*· *GE* :: *GE*· *BE*, ou bien *BE* eſt diviſé en *G* en moyenne & extrême raiſon.

COROLLAIRE II.

De-là ſuit la méthode de réſoudre un Problême dans lequel un point *B* étant donné hors de l'angle donné *ZAF*,

ZAF, on demanderoit une ligne droite BE, qui fut coupée par les côtés de cet angle, en moyenne & extrême raiſon en G, car en menant la ligne BN paralléle au côté AF, qui rencontre le côté ZA prolongé en N; enſuite BA comme dans la figure 12. en faiſant le triangle $GAE = BNE$, comme on l'a montré ci-deſſus dans le preſent problême 49. la ligne BE eſt coupée par les côtés de l'angle donné ZAF, en moyenne & extrême raiſon.

PROBLEME L.

Couper un parallélograme en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans le parallélograme, ou hors du parallélograme, ou enfin dans un de ſes côtés. Tab. 11. Fig. 14.

SOLUTION.

Soit le parallélograme $ABCD$, qu'il faut couper en deux parties égales, par une ligne menée du point E. Après avoir mené les diagonales AC & BD qui ſe coupent dans le point F, il faut par ce même point F, du point donné E, mener la ligne droite EFH; cette ligne coupera le parallélograme propoſé en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*l'hyp.*) AB & DC ſont paralléles, les triangles AFB, CFD ſont (*Th.* 3. *&* 8.) équiangles, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $AB \cdot AF :: CD \cdot CF$, ou (*Regl.* 2. *prop.*) $AB. CD :: AF \cdot CF$. Mais (*Th.* 26.) $AB = CD$. Donc $AF = CF$ De plus, puiſque AB & CD ſont paralléles, les triangles AFH & CFK ſont auſſi (*Th.* 3. *&* 8.) équiangles, & par conſequent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $AF \cdot CF :: AH \cdot CK :: HF \cdot FK$. Donc puiſque on a trouvé que $AF = CF$, AH ſera auſſi $= CK$ & $HF = FK$, & ainſi les triangles AFH, CFK, ſeront auſſi équilatéraux, & (*Cor.* 3. *Th.* 24.) ſemblables en tout. Mais (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les triangles CAB & ACD ſont auſſi égaux, Donc

les quadrilatéres *DAHK* & *BCKH* ſont de même égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Comme chacune des diagonales, diviſe (*Cor. 3. Th. 26.*) le parallélograme par la moitié, ſi le point donné *E* ſe trouvoit dans l'une des diagonales, il eſt conſtant que pour lors le parallélograme ſeroit diviſé en deux parties égales, par la ligne qui paſſeroit le point donné.

PROBLEME LI.

Tab. 22. Fig. 15. Diviſer un quadrilatére rectiligne en deux parties, qui ſoient entre elles en raiſon donnée, par une ligne menée de tel de ſes angles donné qu'on voudra.

SOLUTION.

Soit le quadrilatére *ABCD* qu'il faut diviſer par une ligne menée de ſon angle *A*, en deux parties qui ſoient entre elles comme *M* eſt à *N*. Qu'on méne la ligne diagonale *AC*, & qu'on lui faſſe une paralléle *DE*, qui rencontre le côté *BC* prolongé en *E*, & qu'on méne la ligne *AE*. Il eſt conſtant que pour lors les triangles *ADC* & *AEC* ſur la même baſe *AC* & entre les mêmes paralléles (*conſtruc.*) *AC* & *DE*, ſont (*Cor. 1. Th. 27.*) égaux entr'eux, & par conſéquent en ajoûtant de part & d'autre *ACB*, le triangle *BAE* ſera égal au quadrilatére donné *ABCD*. Cela étant fait, qu'on diviſe (*Sol. 2. Probl. 9.*) *BE*, de maniére que *BG. GE :: M. N*; enſuite qu'on méne la ligne *GF* paralléle à *AC*, & qui rencontre le côté *DC* en F. Enfin qu'on méne la ligne *AF* : Je dis que le quadrilatére *ABCD* eſt diviſé par cette ligne *AF*, en deux parties, qui ſont entre elles en raiſon donnée ; c'eſt-à-dire, que *AFCB. AFD :: M. N*.

DEMONSTRATION.

Puiſque *AC*, *GF*, *DE*, ſont (*conſtr.*) paralléles, non ſeulement les triangles *ADC* & *AEC*, qui ont la même baſe

& qui ſont entre les mêmes paralléles, ſont égaux; mais encore leurs parties *AGC* & *AFC* ſont égales. Donc leurs reſtes *GAE* & *FAD* ſont de même égaux. Mais on vient de montrer que le quadrilatére *ABCD* eſt égal à tout le triangle *BAE*. Donc le reſte *AFCB* eſt égal au reſte *AGB*. Donc *AFCB*· *AFD* :: *BAG*· *GAE* (*Cor.* 2. *Th.* 28.) :: *BG*· *GE*:: *M*· *N*. Donc la ligne droite *AF* diviſe le quadrilatére *ABCD* en deux parties, qui ſont entre elles en raiſon donnée de *M* à *N*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si le point *G* tombe en *C*, pour lors *AF* tombera en *AC*, & ainſi la diagonale *AC* diviſera pour lors le quadrilatére *ABCD*, en deux parties telles entre elles, que *M* eſt à *N*. Qui eſt ce que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

Si enfin le point *G* tombe en *H* entre *C* & *B*, la ligne *AH* diviſera le quadrilatére *ABCD*, de la maniére qu'on le ſouhaite; car puiſqu'on a déja fait voir que les triangles *ADC* & *AEC* ſont égaux entre eux, en leur ajoûtant *CHA*, on aura le quadrilatére *AHCD* égal au triangle *AHE*; & ainſi la partie *BAH*· *AHCD* :: *BAH*· *HAE* (*Cor.* 2. *Th.* 28.) :: *BH HE* (*conſtr.*) :: *M*.*N* Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME LII.

Diviſer un quadrilatére par un point donné dans un de ſes côtés, en deux parties qui ſoient entre elles en raiſon donnée de *M* à *N*. Tab. 22. Fig. 1.

SOLUTION.

Soit *L* le point donné dans le côté *AD* du quadrilatére *ABCD*, qu'il faut diviſer en deux parties qui ſoient entre elles en raiſon donnée; qu'on méne les lignes droites *LB*, *LC*, & les lignes *AE* & *DF* qui leur ſoient paralléles, & qui rencontrent en *E* & *F* le côté *BC* prolongé de part &

d'autre ; enſuite (*Probl.* 9.) qu'on prenne *FG. GE :: M. N*, & qu'on méne la ligne *GH* paralléle à la ligne *LB*, & qui rencontre le côté *AB* en *H*. Enfin qu'on méne la ligne *LH* : Je dis que cette ligne *LH* diviſe la quadrilatére *ABCD*, en deux parties *HLDCBH* & *HAL*, qui ſont entre elles comme *M* eſt à *N*.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident (*Probl. précedent.*) que le triangle *BLF* eſt égal au quadrilatére *LBCD*, & le triangle *BLE* au triangle *ABL*. Donc puiſque les triangles *LGB*, *LHB* ont la même baſe *BL* & ſont entre les mêmes paralléles *GH* & *LB* ; ils ſont auſſi (*Cor.* 2. *Th.* 27.) égaux entre eux, & par conſéquent le triangle *FLG* eſt égal au polygone *LHBCD*, & le triangle *GLE* égal au triangle *ALH*. Donc enfin *LHBCD. ALH : : FLG. GLE : : FG. GE* (*Conſtr.*) *: : M. N*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Dans quelqu'autre point de la baſe *CB* prolongée, que tombe *G*, on fera le même raiſonnement que dans les deux Corollaires du Problême précédent.

PROBLEME LIII.

Tab. 22. Fig. 1. Meſurer la ſurface courbe d'un cylindre droit.

Il faut premiérement meſurer le diamétre *AC* de la baſe du cylindre droit *ABCD* ; enſuite dire : comme 7. 22 (rapport qui approche le plus de celui qui eſt entre le diamétre & la circonférence) de même *AC* eſt au contour de la même baſe ; ainſi le circuit de la baſe, ſera $3\frac{1}{7}$ du diamétre *AC*, & par conſéquent (*Th.* 48.) en multipliant le côté *AB* du cylindre droit, par $3\frac{1}{7}$ du diamétre *AC*, le produit qui en réſultera, ſera la valeur de la ſurface convéxe du même cylindre.

SCOLIE.

On peut démontrer de la même maniére que la ſur-

face du cylindre oblique, eſt égale au produit du côté de ce même cylindre, multiplié par le circuit de la ſection faite par un plan perpendiculaire à l'axe; ce qui ſuit de la démonſtration du Th. 48. & du Th. 43.

PROBLEME LIV.

Tab. 22, Fig. 31

Meſurer la ſurface convéxe d'un cone droit.

SOLUTION.

Il faut multiplier le côté *AF* du cone droit *FAB*, par le demi contour *FPQB* de ſa baſe, & le produit qui en réſulte eſt la ſurface convéxe du cone.

DEMONSTRATION.

Soient deux côtés très-proche l'un de l'autre, *AP* & *AQ*, du cone *AFB*, de maniére que *PAQ* ſoit un triangle, dont la baſe *PQ* ſoit un côté d'un polygone d'une infinité de côtés, que l'on peut regarder comme un cercle (*Cor. Th.* 37.) Donc puiſque ce triangle *PAQ* (comme rectangle à cauſe des angles *P* & *Q* égaux, qui ne différent de l'angle droit, que par la moitié de l'infiniment petit *PAQ*, qui peut être regardée comme rien par rapport à eux) eſt égal (*Scol. Th.* 27.) au produit de la moitié du côté *AP* par la baſe *PQ*; toute la ſurface convéxe du cone droit, compoſée d'autant de triangles égaux au triangle *APQ*, qu'il y a de côtés dans le contour de ſa baſe, ſera auſſi égale au produit de la moitié du côté *AP*, par tous les côtés infiniment petits du contour de la baſe du cone, égaux à *PQ*. Ou, ce qui eſt la même choſe, au produit de tout le côté *AF*, par la moitié du contour de la baſe *FPQB*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Les Géométres n'ont point encore trouvé la méthode de meſurer la ſurface convéxe du cone oblique.

PROBLEME LV.

Mesurer la surface de la terre.

SOLUTION.

Les observations faites par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, prouvent qu'un degré d'un grand cercle de la terre, est à peu près égal à 25 lieuës ; si on multiplie donc 360, qui exprime le nombre des degrés d'un cercle, par 25, le produit sera la valeur du circuit de la terre, qui est 9000 lieuës ; mais parce que comme 22 est à 7, de même le contour de 9000 lieuës est au diamétre du grand cercle de la terre, ce diamétre est environ de 2864 lieuës. Donc puisque (*Th.* 38.) l'aire du cercle est égale au demi-rayon multiplié par la circonférence de ce même cercle, & la surface de la sphére (*Th.* 47.) égale à l'aire de quatre de ses grands cercles, la surface de la terre sera de 25, 776, 000 lieuës quarrées. Ce qu'il falloit trouver.

CHAPITRE TROISIEME.

De la mésure des solides ou des corps.

PROBLEME LVI.

LA base & la hauteur d'un prisme, d'un parallélépipéde étant données, trouver leur solidité ou leur masse.

SOLUTION.

Si le prisme ou le paralélépipéde est rectangle, sa masse ou solidité sera égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur, & cela pour la même raison qui prouve que le parallélograme rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Si le prisme ou parallélépipéde est oblique, il sera encore égal au produit de la base par la hauteur ; car (*Th.* 43.) les prismes ou parallélépipédes obliques sont égaux aux rectangles de la même base & hauteur. Donc tous les prismes & parallélépipédes sont égaux au produit de leur base multipliée par leur hauteur, & par conséquent si on multiplie la base & la hauteur donnée, l'une par l'autre, le produit sera égal à la masse du prisme ou parallélépipéde proposé.

COROLLAIRE.

Puisque les prismes dont les bases sont circulaires, qu'on nomme ordinairement cylindres, sont (*Cor.* 1. *Th.* 43.) des prismes d'une infinité de côtés, la masse des cylindres, est aussi égale au produit de leur hauteur par leur base.

SCOLIE.

On peut facilement par ce qu'on vient de démontrer, connoître le nombre des carreaux qui composent une muraille. Il faut compter combien il y en a en long & en large, & multiplier l'un par l'autre ; le produit exprime le nombre qui compose la base ; ensuite il faut compter combien il y en a dans la hauteur & multiplier ce nombre par celui de la base, & le produit sera le nombre des carreaux dont le mur est composé. Il faut procéder de la même maniére quand il s'agit de trouver la capacité de tel autre espace régulier qu'on voudra.

PROBLEME LVII.

La base & la hauteur d'une pyramide étant données, trouver sa masse ou solidité.

SOLUTION.

Puisque (*Cor.* 1. *Th.* 44.) la pyramide est le tiers du prisme ou parallélépipéde qui a la même base & la même hauteur, & que tout prisme ou parallélepipéde est (*Probl.* 56.) égal au produit de sa base par sa hauteur ; la pyramide doit par conséquent être égale au produit de sa base

par le tiers de ſa hauteur. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

On peut regarder les pyramides dont les baſes ſont circulaires, qu'on nomme ordinairement cones, comme de vraies pyramides d'une infinité de côtés ; & par conſéquent ſi on multiplie la baſe du cone par le tiers de ſa hauteur, ou ſa hauteur par le tiers de ſa baſe, le produit ſera la maſſe ou la ſolidité du cone.

SCOLIE.

Pour trouver la maſſe de tous les autres corps, il faut par le moyen de ce problême, chercher la maſſe des pyramides auſquelles on peut les réduire, & la ſomme de la maſſe de toutes ces pyramides, exprimera la maſſe du corps propoſé ; car comme toutes les figures rectilignes peuvent être diviſées en triangles, de même tous les corps ſe peuvent diviſer en pyramides.

PROBLEME LVIII.

Meſurer une partie de cone.

SOLUTION.

Tab. 23. Fig. 4. Soit la partie *ADBC* du cone *EBC*, qu'il faut meſurer, dont la hauteur *SF* eſt donnée avec les côtés *AB* & *DC*, & les diamétres *AD* & *BC* des baſes paralléles. Qu'on méne la ligne *DO* paralléle à la ligne *AB* ; du point *E* où les côtés du cone ſe rencontrent, qu'on méne la ligne *EF* perpendiculaire aux baſes *APDQ*, *BMCN*, en *S* & en *F*.

Puiſque les triangles *COD*, *CBE*, *DAE* ſont ſemblables (*Th. 29. & Cor.* 1.) *OC. OD* ou *AB* :: *AD. AE* ; & par conſéquent les trois premiers termes de cette analogie étant donnés (*l'hyp.*), on trouvera par la régle de trois, le quatriéme *AE*. De plus, les triangles *BEF*, & *AES* étant auſſi ſemblables, *AB* (*Th. 29. & Cor.* 1.) *AE* :: *FS. SE*. Donc puiſqu'on connoît encore les trois premiers termes

de

cette analogie, on trouvera auſſi, par la régle de trois, le quatriéme qui eſt *ES*.

Mais (*Cor. du Probl. précédent*) la maſſe du cone *BEC*, eſt égale au produit de ſa baſe *BMCN*, par le tiers de ſa hauteur *EF*; de même le cone *AED* eſt égal au produit de la baſe *APDQ*, par le tiers de ſa hauteur *ES*. Donc la partie *ABCD* du cone total *BCE*, eſt égale à l'excès dont le produit de la grande baſe par le tiers de la hauteur du cone entier, ſurpaſſe le produit de la petite baſe par le tiers de la hauteur du petit cone *AED*.

Tab. 22. Fig 5.

De ce problême ſuit la méthode de meſurer les tonneaux, que l'on peut regarder comme compoſés de deux parties de cone *ABDC*, *ABFE*, jointes par la baſe commune *AGBO*. Mais il faut remarquer que pour connoître la quantité de la liqueur contenuë dans un tonneau, il eſt néceſſaire de retrancher des diamétres *AB*, *CD*, & du côté *AC*, l'épaiſſeur des douves, avant que de faire l'opération marquée dans le Problême.

PROBLEME LIX.

Trouver la ſolidité & la maſſe de la terre.

On a démontré dans le Cor. du Th. 46, que la maſſe de la ſphére, eſt égale au produit de quatre de ſes grands cercles; c'eſt-à-dire (*Th.* 47.) à la ſurface de la ſphére, par le tiers du rayon. Mais on a trouvé (*Probl.* 55.) que la ſurface de la terre étoit de 25, 776, 000 lieuës quarrées, & ſon diamétre de 2864 lieuës de long, ou le tiers du rayon d'environ 477. Si on multiplie donc 25, 776, 000 par 477, le produit ſera la maſſe ou la ſolidité de la terre, ſavoir 12, 295, 152, 000 lieuës cubiques. Ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME LX.

Trouver combien il faudroit de grains de ſable pour faire une maſſe égale à la terre.

SOLUTION.

Archiméde a fait un Livre ſur cette queſtion ; comme on diſputoit quelquefois ſi le ſable qui eſt ſur les bords de la mer pouvoit ſe compter, il démontra non ſeulement qu'on pouvoit le compter ; mais encore qu'on pouvoit ſavoir combien de grains de ſable pourroient être contenus ſous les Cieux.

Pour réſoudre ce Problême, il faut, comme Archiméde, que nous faſſions quelques ſuppoſitions.

Suppoſons, 1°. Qu'un grain de coriandre contient mille petits grains de ſable, 2°. Que dix grains de coriandre diſpoſés en ligne droite, font un pouce; puiſqu'il y a douze pouces dans un pied, un pied contiendra 120 grains de coriandre, & par un conſéquent dans un pas géométrique, qui eſt de cinq pieds, il y aura 600 grains de coriandre; & dans un mille 600000, dans une lieuë 1800000, qui multipliez par 2864 lieuës, égales (*Probl.* 55.) au diamétre de la terre, on aura dans le diamétre de la terre 5, 155, 200, 000 grains de coriandre.

Après avoir trouvé combien il y a de grains de coriandre dans le diamétre de la terre, ſi l'on dit : 7. 22 :: le nombre des grains de coriandre, égal au diamétre de la terre, eſt à ſa circonférence; on trouvera (*Probl.* 55.) le nombre des grains de coriandre égal à la circonférence de la terre, & (*Probl.* 60.) le nombre des grains de coriandre égal à ſa ſolidité, & ce nombre multiplié par 1000, donnera les grains de ſable qui feroient une maſſe égale à la terre. Cela eſt plus long que difficile.

PROBLEME LXI.

Mesurer toutes sortes de corps irréguliers.

SOLUTION.

Les corps irréguliers ne pouvant facilement être réduits à des corps réguliers, il n'est pas aisé de les mesurer géométriquement ; c'est pourquoi il faut se servir de la méthode suivante.

Ayez un vase d'une figure parallélépipéde qui puisse contenir de l'eau, & assez grand pour que le corps que l'on veut mesurer puisse être entiérement couvert de l'eau qui est dans le vase; après l'avoir placé de maniére qu'il soit paralléle à l'horison, il faut mettre dans ce vase le corps que l'on veut mesurer, ensuite marquer sur les côtés du vase, l'endroit où répond la surface de l'eau. Cela étant fait, retirez le corps, & marquez encore où répond la surface de l'eau lorsqu'elle n'est plus en mouvement, & mesurez (*Probl. 56.*) les deux parallélépipédes d'eau, dont la base commune est le fond du vase, & les hauteurs sont les perpendiculaires menées des marques de la surface de l'eau, sur les côtés du vase, jusques à sa base ; ensuite retranchez le petit parallélépipéde du grand, & ce qui restera sera égal à la masse du corps irrégulier.

FIN.

TABLE

DES ELEMENS DE GEOMETRIE.

PREMIERE PARTIE.

DE LA GEOMETRIE SPECULATIVE, page 2
Axiomes ou verités connuës d'elles-mêmes, 2
PREMIER LIVRE. Des lignes, 4
CHAPITRE PREMIER. Des lignes droites & des angles qu'elles renferment, 4
Définition I. Ce qu'on entend par ligne droite, 4
Définition II. Ce que c'eſt que plan, ou ſurface plane, 5
Définition III. Ce qu'on entend par angle, 6
Définition IV. Ce que c'eſt qu'angle droit, obtus, aigu, 6
Théorême I. Une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, forme deux angles droits, ou égaux, pris enſemble, à deux droits, 7
Théorême II. Si ces deux angles ſont droits, ou égaux pris enſemble à deux droits, ils ſont formés par une ligne droite tombant ſur une autre même ligne droite, 8
Théorême III. Si deux lignes droites ſe coupent, elles forment des angles oppoſés au ſommet, égaux entr'eux, 9
Théorême IV. Si les angles oppoſés au ſommet, ſont égaux; les deux lignes qui forment ces angles, ſont des lignes droites, 10
Théorême V. Une ligne indéfinie, perpendiculaire dans le milieu d'une autre, a tous ſes points également éloignés des extrêmitez de cette ligne 10
Théorême VI. Une ligne perpendiculaire dans le milieu d'une autre, paſſe par tous les points, qui ſont dans le plan de ces lignes droites, également diſtans des extrêmités de cette autre, 11
Théorême VII. 1°. La plus courte des lignes qu'on peut mener du même point, ſur une ligne droite, eſt la perpendiculaire. 2°. La plus courte de toutes les autres eſt celle qui eſt la plus proche de la perpendiculaire, 13
Définition V. Ce qu'on entend par lignes paralléles, 17
Théorême VIII. Si des lignes ſont paralléles. 1. Les angles alternes, internes ſont égaux. 2. Les angles alternes externes

ſont auſſi égaux. 3. Les angles internes du même côté ſont égaux à deux droits. 4. Les angles externes du même côté, ſont auſſi égaux à deux droits, 17

Théorême IX. Des lignes ſont paralléles. 1. Si les angles alternes internes ſont égaux. 2. Si les angles alternes externes ſont auſſi égaux. 3. Si les angles internes du même côté, ſont enſemble égaux à deux droits. 4. Si les angles externes du même côté, ſont auſſi égaux à deux droits, 19

CHAPITRE SECOND. Des lignes circulaires & de leur rencontre avec les lignes droites, 20

Définition VI. Ce que c'eſt que cercle, circonférence, arc, centre, rayon, diamétre, corde, ſegment, ſecteur, tangente, 21

Théorême X. 1. La plus longue des lignes droites qu'on peut mener du même point hors du centre du cercle, à la circonference, eſt celle qui paſſe par le centre. 2. La plus longue des autres, eſt celle qui ſe termine à un point de la circonference, plus proche que les autres, de celui auquel ſe termine la plus longue, 22

Théorême XI. La corde ou la ligne droite qui joint deux points de la circonférence, eſt toute dans le cercle, 25

Théorême XII. De ces trois choſes 1. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite dans le même plan du cercle; 2. Qu'elle eſt coupée perpendiculairement; 3. Que la ſecante paſſe par le centre du cercle : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement, 27

Théorême XIII. De ces trois choſes 1. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite menée dans le même plan du cercle; 2. Que l'arc tendu par cette corde, eſt auſſi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde; 3. Que cette ligne droite paſſe par le centre : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement, 29

Théorême XIV. Lorſque deux cercles ſe rencontrent dans deux points, l'un eſt tellement coupé en deux parties par l'autre, que l'une de ces deux parties eſt toute dedans, l'autre toute hors du cercle qui le coupe, 31

Théorême XV. La ligne droite qui joint les centres des cercles qui ſe touchent, paſſe par le point où ils ſe touchent, 32

CHAPITRE III. De la meſure des angles rectilignes, 33

Théorême XVI. La meſure de l'angle qui eſt au centre, eſt l'arc compris entre ſes côtez, 33

Théorême XVII. L'angle qui eſt entre le centre & la circonférence du cercle, eſt égal à la moitié de la ſomme des arcs compris entre ſes côtés & ceux de l'angle qui lui eſt oppoſé au

ſommet, page 34
Théorême XVIII. L'angle qui eſt à la circonférence, eſt égal à la moitié de l'arc compris entre ſes côtez, ſoit qu'ils coupent tous deux le cercle, ſoit que l'un coupe le cercle & l'autre le touche 35
Théorême XIX. L'angle qui eſt hors du cercle, de quelque maniére que ſes côtés prolongés à l'infini rencontrent le même cercle, eſt égal à la moitié de la différence des arcs, ſavoir de l'arc concave & de l'arc convexe, compris entre ſes côtés, 37
LIVRE SECOND. Des ſurfaces, 38
Définition VII. Ce qu'on entend par ſurface, 38
Théorême XX. Si deux plans ſe coupent, leur interſection commune eſt premiérement une ligne; ſecondement une ligne droite, 39
Définition VIII. Ce que c'eſt qu'un angle formé par un plan incliné ſur un autre plan, 40
Definition IX. Ce qu'on entend par une ligne perpendiculaire à un plan, 41
Définition X. Ce qu'on entend par des plans paralléles, 41
CHAPITRE I. Des triangles rectilignes, 42
Définition XI. Ce que c'eſt qu'un triangle, & de combien de ſortes il y en a, 42
Théorême XXI. Les trois angles d'un triangle ſont toûjours pris enſemble, égaux à deux droits, 43
Théorême XXII. 1. Dans un triangle, les côtés égaux ſont oppoſés à des angles égaux. 2. Les angles égaux ont des côtés oppoſés, qui ſont auſſi égaux, 44
Théorême XXIII. 1. Dans un triangle, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle. 2. Le plus grand angle eſt auſſi oppoſé au plus grand côté, 45
Théorême XXIV. Si de deux triangles dont l'un a deux côtés égaux à deux côtés de l'autre, l'angle compris entre les deux côtés égaux, eſt plus grand ue l'angle compris entre les deux côtés de l'autre, la baze de l'un ſera auſſi plus grande que la baze de l'autre; & réciproquement, &c. 46
CHAPITRE II. Des parallélogrames 47
Définition XII. Ce qu'on entend par parallélograme, trapéze, diagonale, & combien il y a de ſortes de parallélogrames, 48
Définition XIII. Ce qu'on entend par poligone, 48
Théorême XXV. Les lignes compriſes entre des lignes paralléles & égales, ſont auſſi paralléles & égales, 48
Théorême XXVI. 1. La figure de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ſont égaux, eſt un parallélograme. 2. Les côtés op-

posés du parallélograme, sont égaux, 49
Théorême XXVII. 1. Les parallélogrames qui sont sur la même baze & entre les mêmes paralléles, sont égaux. 2. Ceux qui ayant la même baze, sont égaux, sont entre les mêmes paralléles. 3. Ceux qui sont égaux & entre les mêmes paralléles, ont aussi la même baze, 50
LIVRE TROISIEME. Des proportions, 53
Définition XIV. Ce que c'est que raison, & combien de sortes il y en a, 53
Définition XV. Ce qu'on entend par antécédent & conséquent. 54
Définition XVI. Ce que c'est que raison d'égalité, & d'inégalité, 54
Définition XVII. Ce qu'on entend par raisons égales, semblables, les mêmes, 54
Définition XVIII. Ce qu'on entend par raisons inégales, dissemblables, différentes, 55
Définition XIX. Ce que c'est que proportion, 55
Axiome IX. 55
Lemme premier. Des proportions, 56
Regles des proportions, 56
LIVRE QUATRIEME. Des proportions des lignes droites, & des figures qu'elles contiennent, 59
CHAPITRE I. 59
Theorême XXVIII. Les aires des parallelogrames & des triangles en general, sont entr'elles comme les produits de leur hauteur par leur baze, 59
Définition XX. Ce qu'on entend par figures égales, 60
Theorême XXIX. 1. La ligne paralléle à la baze d'un triangle, coupe ses côtés proportionnellement. 2. La ligne qui coupe les côtés du triangle proportionnellement, est paralléle à sa baze, 60
Théorême XXX. Les parallélogrames semblables sont comme les quarrés des côtés homologues 63
Théoréme XXXI. Du rapport qui est entre les quarrés des côtés de toutes sortes de triangles 64
Lemme II. Si plusieurs grandeurs sont en même rapport, la somme des antecédens, est à la somme des conséquens, comme le premier antecédent est au premier conséquent, 66
Théorême XXXII. Les contours des figures semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues, 67
Lemme III. 67
Théorême XXXIII. Les aires des figures ou poligones semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues, 68

Lemme IV. L'angle formé par deux tangentes de cercle, eſt diviſé en deux parties égales, par la ligne menée du point où concourent ces deux lignes, au centre du cercle, 69
Définition XXI. Ce que c'eſt que figure circonſcrite, inſcrite, 69
Théorême XXXIV. Les contours des figures ſemblables circonſcrites à des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles, 70
Théorême XXXV. Les figures ſemblables inſcrites dans des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles, 70
Theorême XXXVI. Les aires des figures ſemblables inſcrites, ou circonſcrites à des cercles, ſont comme les quarrés des diamétres de ces cercles, 71
Théorême XXXVII. Les contours des cercles, ſont comme les diamétres, & les aires comme les quarrés des diamétres, 71
Théorême XXXVIII. L'aire du cercle eſt égale au produit de la circonférence, par la moitié du rayon, 72
Théoreme XXXIX. 73
CHAPITRE II. De la Trigonométrie, 75
Définition XXII. Ce qu'on entend par ſinus, tangente & ſécante, 75
Définition XXIII. Ce qu'on entend par ſinus total, 76
Définition XXIV. Ce qu'on entend par ſinus renverſé, 76
Théorême XL. Les côtés d'un triangle rectiligne, ſont entr'eux, comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés, 78
Théorême XLI. Dans un triangle rectiligne, le plus grand côté eſt à la ſomme des deux autres, comme leur différence eſt à la différence des parties du plus grand côté diviſé par la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé, 79
Lemme V. La plus grande de deux grandeurs inégales, eſt égale à la moitié de leur différence, & la plus petite eſt égale à la moitié de leur ſomme, moins la moitié de leur différence, 80
Théorême XLII. Dans tous les triangles rectilignes, la ſomme de deux côtés, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi ſomme des angles adjacens au troiſiéme côté, eſt à la tangente de la demi différence de ces mêmes angles, 80
LIVRE CINQUIEME. Des corps ou des ſolides, 83
Définition XXV. Ce qu'on entend par priſme, & combien de ſortes il y en a, 83
Définition XXV. Ce qu'on entend par pyramide, 84
Théorême XLIII. Deux priſmes, ou parallélépipédes, ou enfin deux pyramides qui ont la même baze & ſont entre les mêmes plans paralléles, ſont égales, 84
Théorême XLIV. Un priſme triangulaire eſt le triple d'une pyramide, qui a la même baze & la même hauteur, 85
Théorême

Théorême XLV. En general les prifmes, parallélépipédes, cylindres, pyramides, cones, ſont entr'eux comme les produits des hauteurs par les baſes, page 87
Théorême XLVI. La ſphére eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit, 87
Théorême XLVII. La ſurface de la ſphére eſt égale à la ſomme de quatre grands cercles de cette meme ſphére, 89
Théoreme XLVIII. La ſurface du cylindre droit, ſans ſes baſes, eſt égal au produit du contour de ſa baſe par ſa hauteur, 90
Theorême XLIX. La ſurface du cone droit, ſans ſa baſe, eſt égale au produit de la moitié d'un côté, par la circonférence de ſa baſe, 91
Théorême L. La ſphére eſt égale au cone dont la hauteur eſt le rayon de la ſphére, & dont la baſe eſt égale à quatre grands cercles de la ſphére, 92
SECONDE PARTIE. De la Géométrie pratique, 93
CHAPITRE I. De la poſition & de la meſure des lignes droites, 93
Problême I. Mener d'un point donné, une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée, 93
Problême II. Mener par un point donné, une ligne paralléle à une autre ligne donnée, 96
Problême III. D'un point donné, mener une ligne, qui avec une autre ligne auſſi donnée, faſſe un angle égal à un angle auſſi donné, 97
Problême IV. Couper en deux parties égales un angle donné, 99
Problême V. Diviſer un angle droit en trois parties égales, 101
Problême VI. Couper un angle rectiligne en trois parties égales, 101
Problême VII. Diviſer un angle rectiligne en autant de parties qu'on voudra, 102
Problême VIII. Diviſer la circonférence d'un cercle en 360 parties égales, qu'on appelle degrés, 104
Problême IX. Diviſer une ligne droite en pluſieurs parties, qui ſoient entr'elles en tel rapport qu'on voudra, 105
Problême X. Décrire un cercle par trois points donnés, qui ne ſoient pas diſpoſés en ligne droite, 107
Problême XI. mener une ligne qui touche un cercle dans un point donné, 108
Problême XII. Trois lignes étant données, trouver une quatriéme proportionnelle, 109
Problême XIII. Deux lignes droites étant données, trouver entr'elles une moyenne proportionnelle, 110

Problême XIV. La moyenne de trois proportionnelles étant donnée avec la ſomme des extrêmes, trouver ces extrêmes, 111
Problême XV. La moyenne de trois proportionnelles, étant donnée avec la différence des extrêmes, trouver ces extrêmes, 112
Problême XVI. Couper une ligne droite en moyenne & extrême raiſon, 112
Problême XVII. Une ligne droite indéfinie étant donnée, & coupée dans deux points, la couper une troiſiéme fois de telle maniére qu'on voudra. 113
Problême XVIII. Deux côtez d'un triangle rectiligne & l'angle oppoſé à l'un de ces côtés, étant donnés, trouver l'angle dont on connoît l'eſpéce, c'eſt-à-dire, s'il eſt obtus ou aigu, oppoſé à l'autre côté donné. 114
Problême XIX. Deux angles d'un triangle rectiligne, avec un de ſes côtés, étant donnés, trouver le troiſiéme angle avec les deux autres côtés. 115
Problême XX. Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, trouver tous ſes angles. 116
Problême XXI. Deux côtés d'un triangle rectiligne, & l'angle compris entre ces côtés étant donnés, trouver les autres angles & le même côté. 117
Problême XXII. Dans un triangle rectiligne, deux angles avec un côté, ou deux côtés avec un angle, étant donnés, ou bien tous les côtés, trouver ſa hauteur. 118
Problême XXIII. Approcher à l'infini de la valeur rectiligne d'un arc de cercle. 118
Problême XXIV. Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, acceſſibles par une extrêmité ſeulement. 120
Problême XXV. Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, inacceſſibles. 121
Problême XXVI. Déterminer par où paſſe une ligne droite, dont on ne voit que deux points, qui en ſont les extrêmités. 121
CHAPITRE II. De la meſure des ſurfaces rectilignes. 122
Définition XXVII. Ce que c'eſt qu'un polygone régulier. 122
Problême XXVII. Le nombre des côtés d'un poligone régulier étant donné, trouver l'angle du centre. 124
Problême XXVIII. Conſtruire un triangle iſoſcéle, dont chaque angle à la baſe, ſoit le double de celui qui eſt au ſommet. 125
Problême XXIX. Dans un cercle donné, décrire un triangle rectiligne équiangle à tel triangle qu'on voudra. 125
Problême XXX. Décrire dans un cercle donné, un pentagone régulier. 126
Problême XXXI. Décrire ſur une ligne droite un pentagone

regulier. 127
Problême XXXII. Inſcrire un héxagone dans un cercle donné. 128
Problême XXXIII. Décrire un héxagone ſur une ligne droite donnée. 129
Problême XXXIV. Décrire dans un cercle donné, un quindécagone régulier. 130
Problême XXXV. Décrire dans un cercle donné, ou ſur une ligne droite donnée, un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra. 131
Problême XXXVI. Dans un triangle rectiligne, deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin tous les côtez étant donnés, trouver l'aire du triangle. 132
Problême XXXVII. Trouver l'aire de toutes ſortes de figures. 132
Problême XXXVIII. Faire des cartes topographiques. 133
Problême XXXIX. Faire ſur la terre & dans un point marqué d'une ligne donnée, un angle d'une grandeur déterminée. 134
Problême XL. Meſurer un angle ſur la terre. 135
Problême XLI. Décrire ſur la terre un polygone regulier, un côté ou un rayon étant donné. 136
Problême XLII. Décrire ſur la terre telle figure rectiligne qu'on voudra, réguliere ou irréguliere, comme une Ville, une Citadelle, un Château tel qu'il eſt repreſenté ſur le papier. 137
Problême XLIII. Tracer ſur le papier une figure rectiligne, par exemple, une Ville, un Château, une Citadelle, &c. 138
Problême XLIV. Diviſer un triangle rectiligne en deux, trois, & autant de parties qu'on voudra. 139
Problême XLV. Diviſer un triangle en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans un des côtés, à un autre côté. 140
Problême XLVI. Diviſer un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un point donné dans un des côtés. 141
Problême XLVII. Diviſer un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un côté à un autre, & de différens points. 142
Problême XLVIII. D'un angle donné, par un point donné dans un côté, couper un triangle égal à un triangle donné. 143
Problême XLIX. D'un angle donné couper un triangle égal à un triangle donné, par une ligne menée d'un point donné hors de l'angle. 143
Problême L. Couper un parallélograme en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans le parallélograme, ou hors du parallélograme, ou enfin dans un de ſes côtés. 145

Problême LI. Diviſer un quadrilatére rectiligne en deux parties, qui ſoient entr'elles en raiſon donnée, par une ligne menée de tel de ſes angles qu'on voudra. 146
Problême LII. Diviſer un quadrilatére par un point donné dans un de ſes côtés, en deux parties qui ſoient entr'elles en raiſon donné. 147
Problême LIII. Meſurer la ſurface courbe d'un cylindre droit. 148
Problême LIX. Meſurer la ſurface convexe d'un cone droit. 149
Problême LV. Meſurer la ſurface de la terre. 150
CHAPITRE III. De la meſure des ſolides ou des corps. 150
Problême LVI. La baſe & la hauteur d'un priſme, d'un parallélépipéde étant données, trouver leur ſolidité, ou leur maſſe. 150
Problême LVII. La baſe & la hauteur d'une pyramide étant données, trouver ſa maſſe ou ſolidité. 151
Problême LVIII. Meſurer une partie du cone. 152
Problême LIX. Trouver la ſolidité & la maſſe de la terre. 153
Problême LX. Trouver combien il faudroit de grains de ſable pour faire une maſſe egale à la terre. 154
Problême LXI. Meſurer toutes ſortes de corps irreguliers. 155

Fin de la Table des Elémens de Géométrie.

Fautes à corriger dans les Elémens d'Algébre & d'Arithmétique.

PAge 22. Définition 1, corrigés 5. Page 44. ligne 17, s'il arrivoit, liſés, s'il arrivoit.

Dans les Elémens de Géométrie.

Page 2. ligne 3. des propoſitions, liſés, des proportions. Page 11. ligne 13, des l'un, liſés, de l'un. Page 12. ligne 9 du Corollaire, ces qui, liſés, celles qui. Page 51. ligne 9 de la demonſtration de la ſeconde partie, prolongé, liſés, prolongée. Page 66 pénultiéme ligne du Scolie, du côté de *BC*, liſés, du côté *BC*. Page 80. ligne 1. liſés, à la moitié de leur ſomme. Page 90. ligne 2 de la démonſtration, & ſont, liſés, ſont. Page 116. Problême 20, tous ces angles, liſés, tous ſes angles. Page 120. ligne 8, en continuan, corrigés, en continuant. Page 130. Problême 34, au quindécagone, liſés, un quindécagone. Page 146. derniére ligne du ſcolie, qui paſſeroit le point, liſés, qui paſſeroit par le point. Page 147. pénultieme ligne du Corollaire 2. liſés *BH-HE*.

TAB. 1.

fig. 1.

Cap. 1.

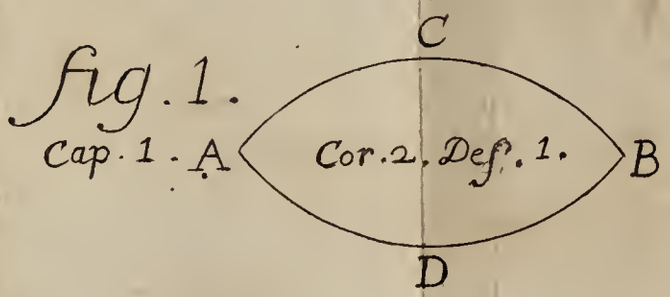


fig. 2.

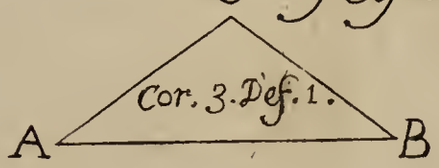


fig. 3.

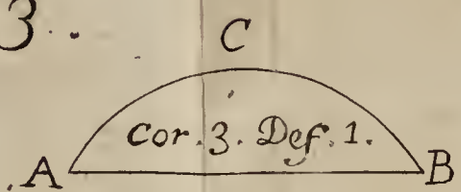


fig. 4.

Def. 3.

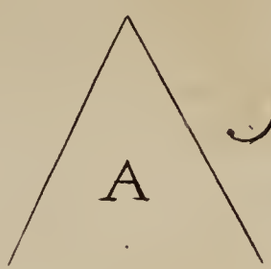


fig. 5.

Def. 3.

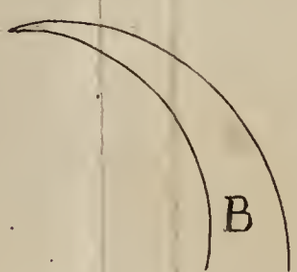


fig. 6.

Def. 3.

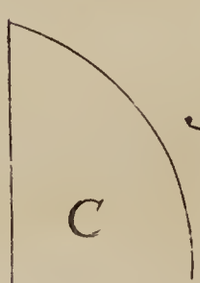


fig. 7.

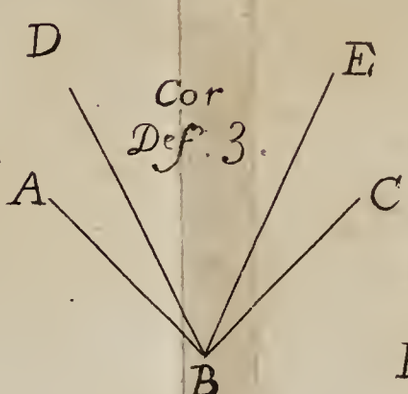
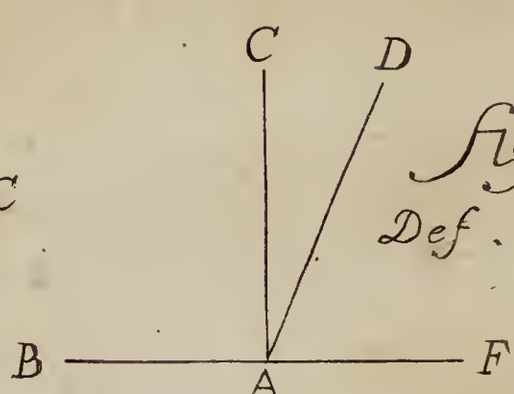


fig. 8.

Def. 4.



Vallet. f. 1731.

TAB . 2.

fig. 1.
Th. 1.

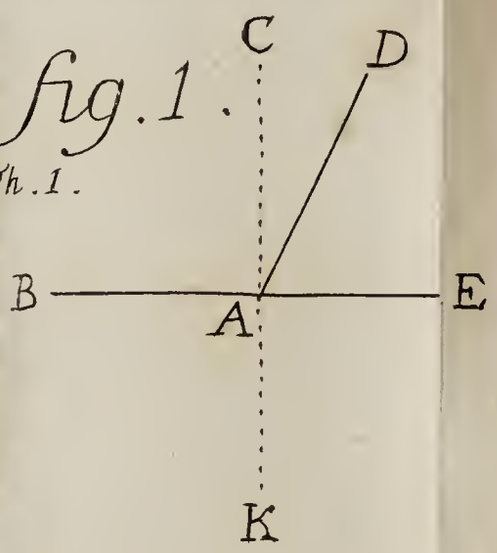


fig. 2.
Th. 2.

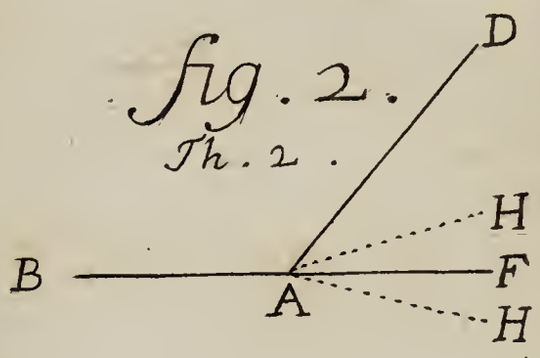


fig. 3.
Th. 3. & 4.

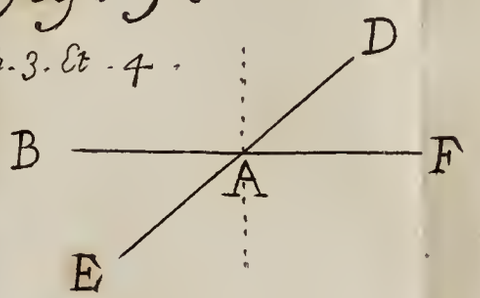


fig. 4.
Th. 5.

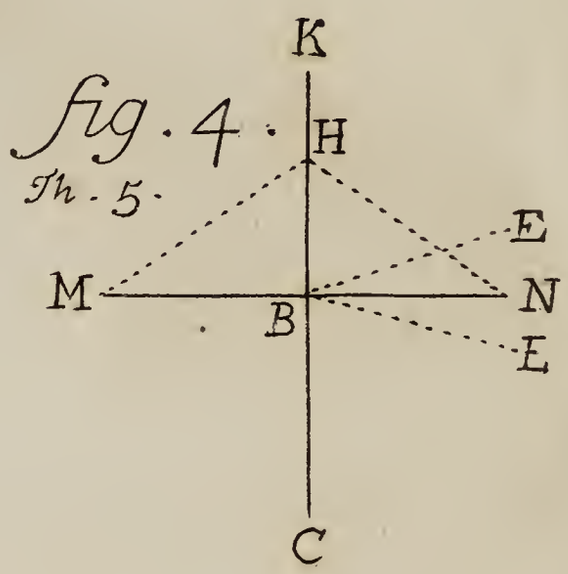


fig. 5.
Th. 6.

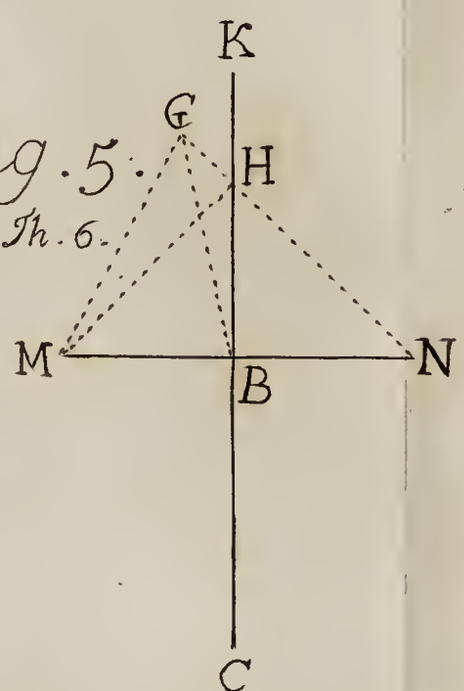
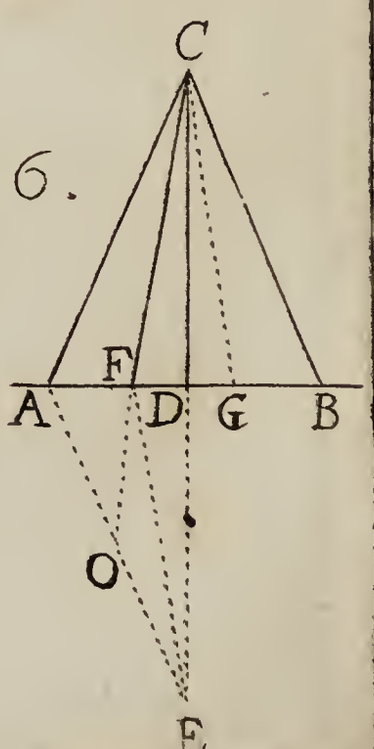


fig. 6.
Th. 7.



TAB. 3.

fig. 1.

Th. 8. & 9.

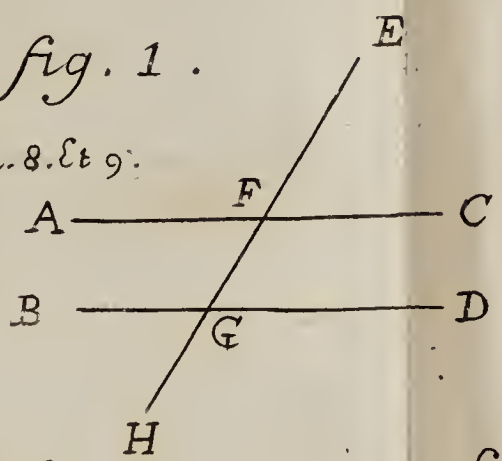


fig. 2.

Th. 8. & 9.

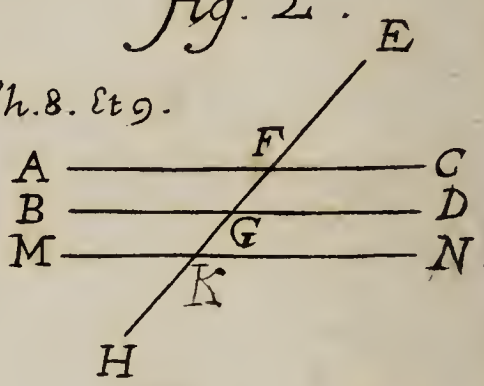


fig. 3.

Cap. 2.
Cor. 8.
def. 6.

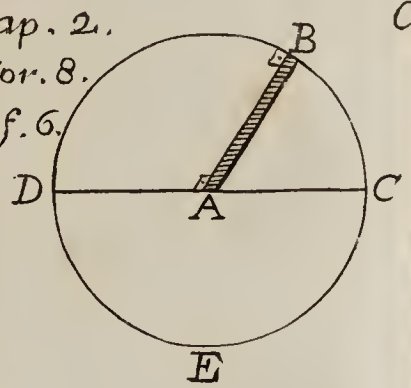


fig. 4.

Cor. 1. Th. 12.

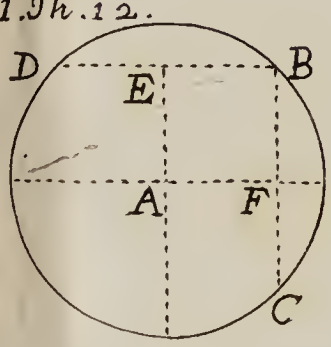


fig. 5.

Th. 10.

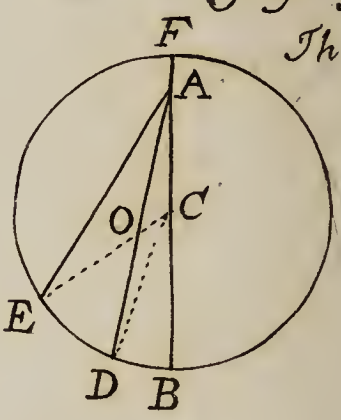


fig. 6.

Th. 10.

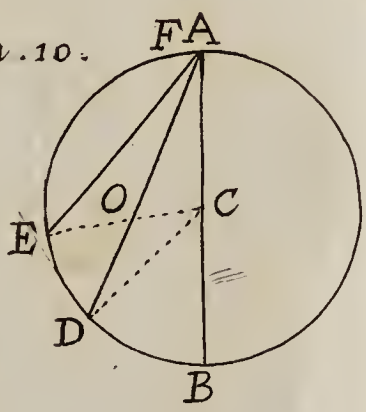


fig. 7.

Th. 10.

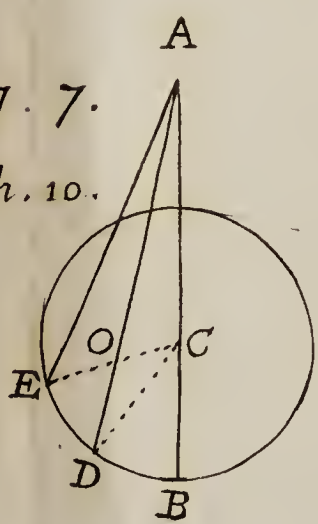
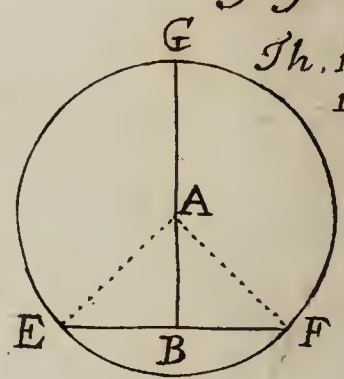


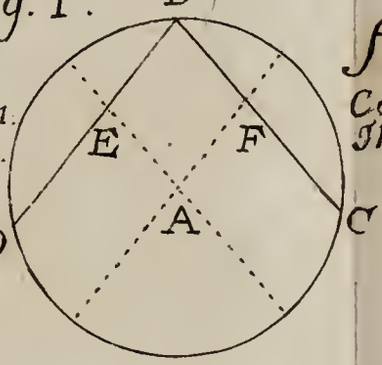
fig. 8.

Th. 11. & 12.



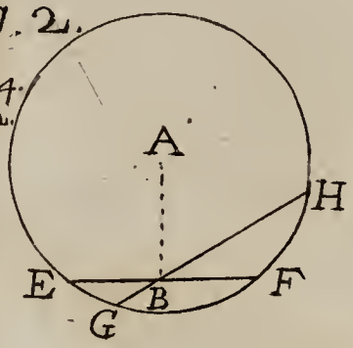
TAB. 4.

fig. 1.



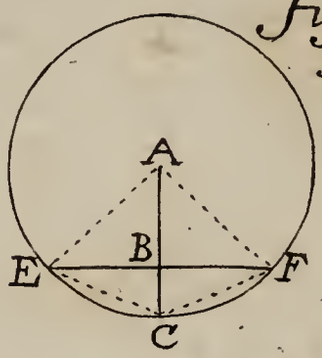
Cor. 1. Th. 12.

fig. 2.



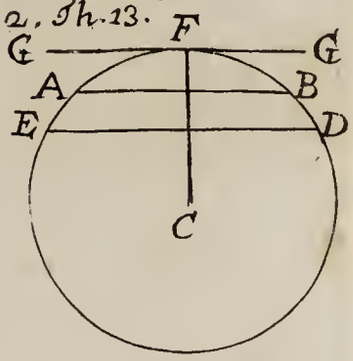
Cor. 4. Th. 12.

fig. 3.



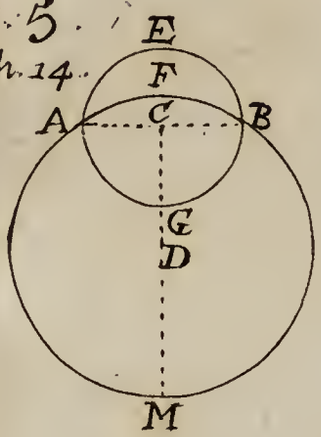
Th. 13.

fig. 4.



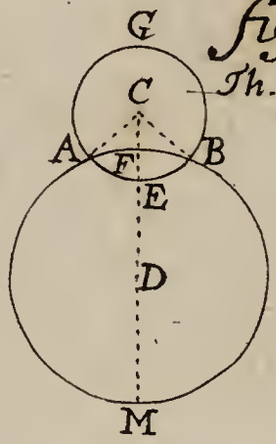
Cor. 2. Th. 13.

fig. 5.



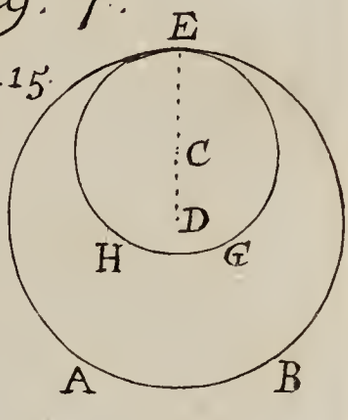
Th. 14.

fig. 6.



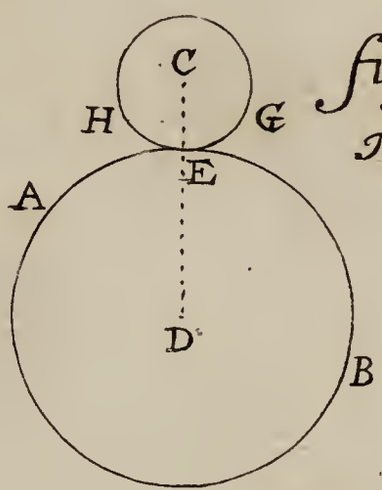
Th. 14.

fig. 7.



Th. 15.

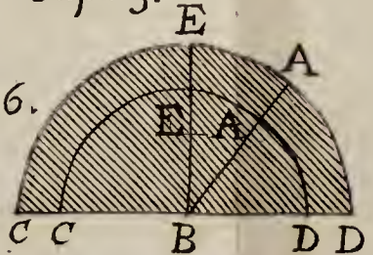
fig. 8.



Th. 14.

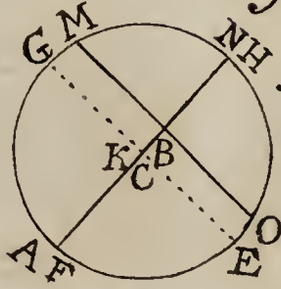
Cap. 3.

fig. 9.



Cor. 1. Th. 16.

fig. 10.



Th. 17. fig. 1.

TAB. 5.

fig. 1.

Th. 17. f. 2.

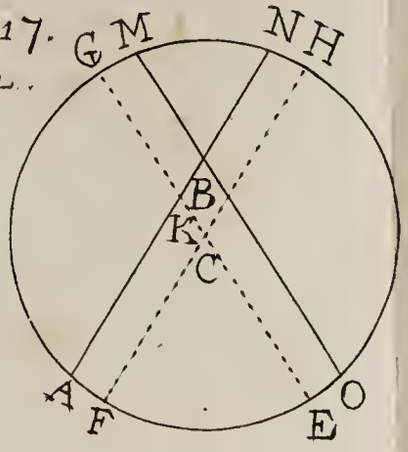


fig. 2.

Th. 18. f. 1.

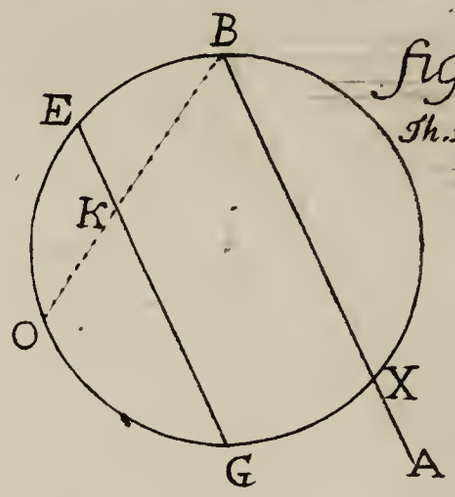


fig. 3.

Th 18. f. 2.

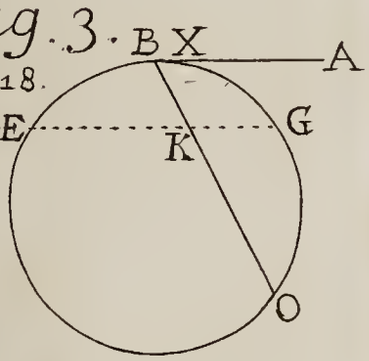


fig. 4.

Cor. 1. Th. 18.

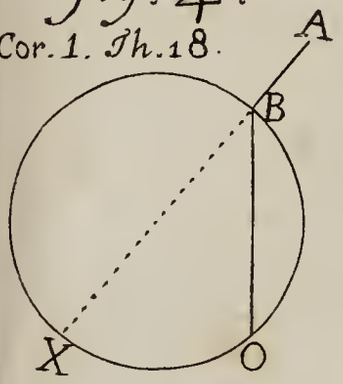


fig. 5

Cor. 2. Th 18.

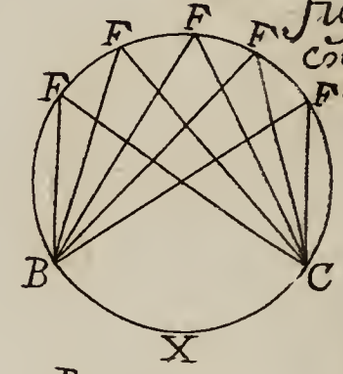


fig 6.

Cor. 1 Th 18.

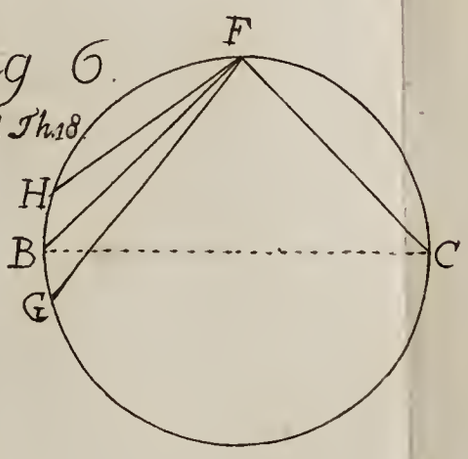
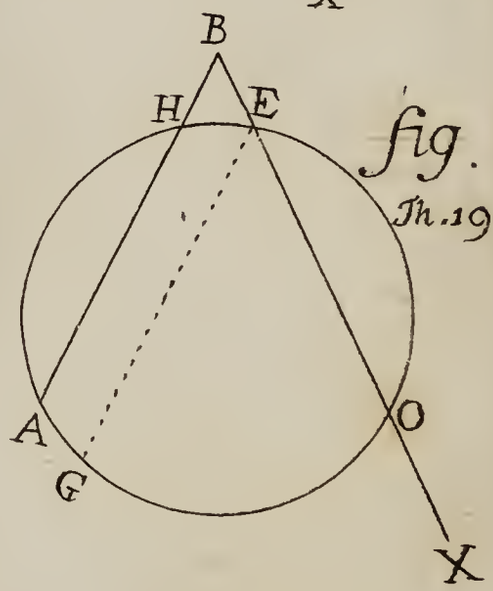


fig. 7.

Th. 19. f. 1.



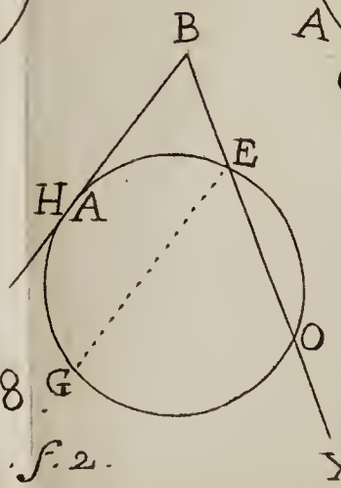


fig. 8.

Th 19. f. 2.

TAB. 7.

fig. 1.

Cor. Def. 9. f. 2.

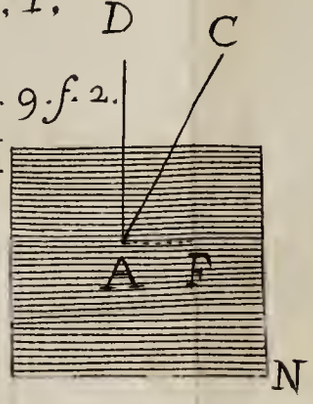


fig. 2. Cap. 1.

Def. 2.

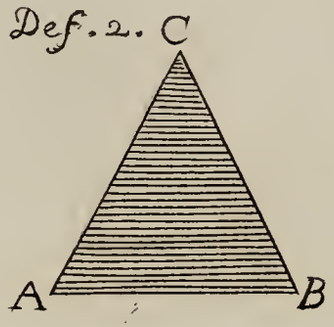


fig. 3.

Th. 21.

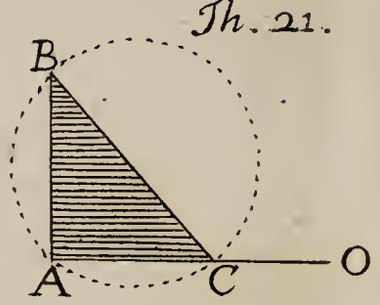


fig. 4.

Th. 22. & 23.

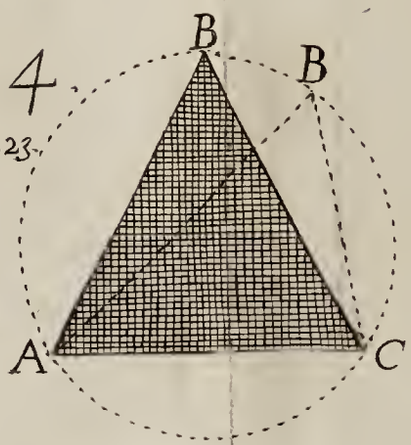


fig. 5.

Th. 24. f. 1.

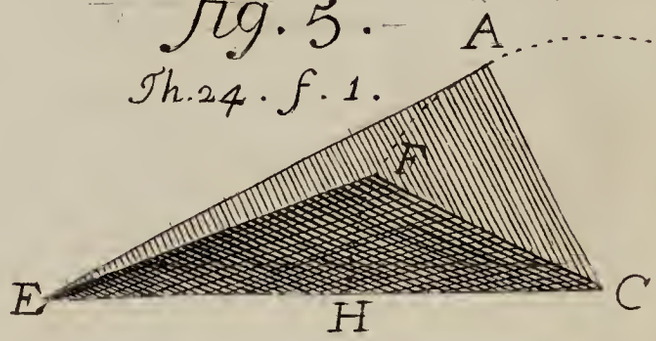


fig. 6.

Th. 24. f. 2.

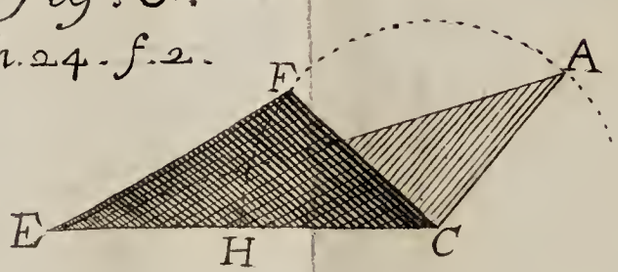


fig. 7.

Cor. 3. Th. 24.

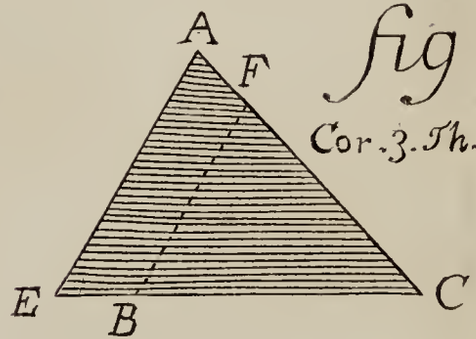


fig. 8.

Cap. 2. geo. Spe.

Def. 12.

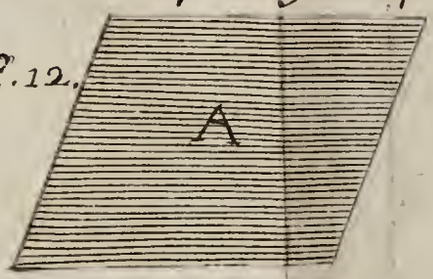
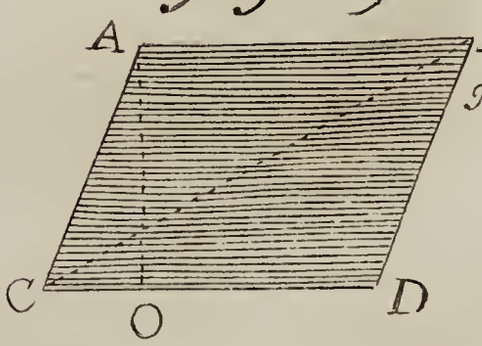


fig. 9.



Th. 25. & 26.

TAB. 9.

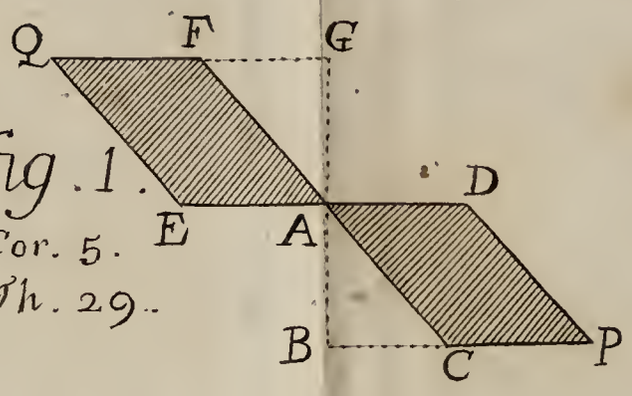


fig. 1.
Cor. 5.
Th. 29.

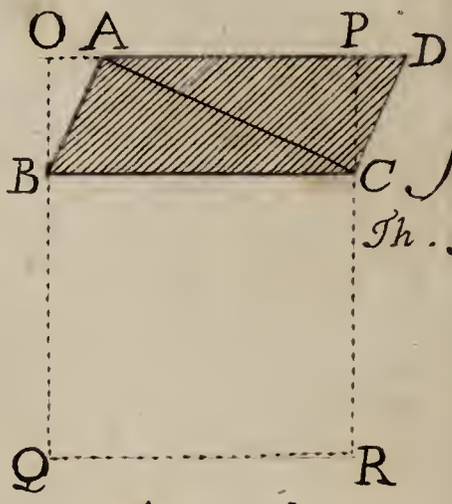


fig. 2.
Th. 30.

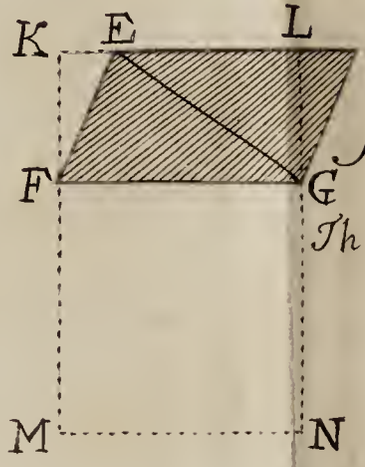


fig. 3.
Th. 30.

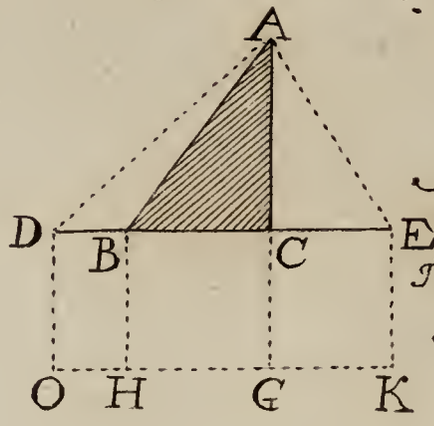


fig. 4.
Th. 31. Et lem. 2.
f. 1.

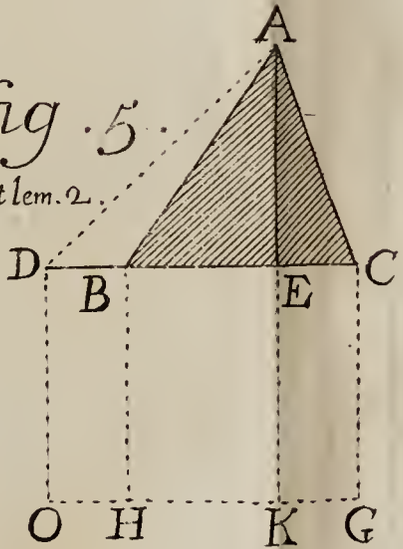


fig. 5.
Th. 31. Et lem. 2.
f. 2.

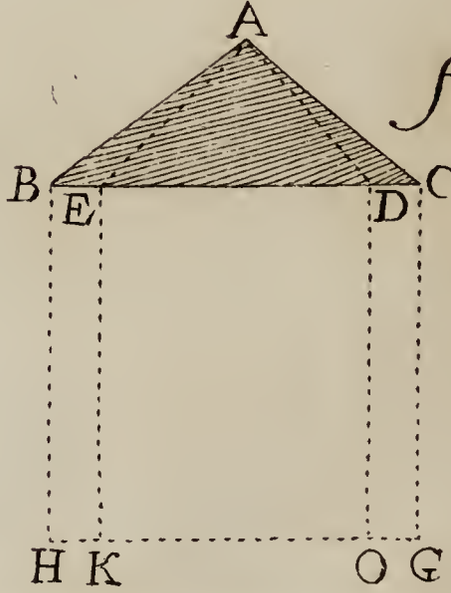


fig. 6.
Th. 31. Et lem. 2.
f. 2.

TAB. 10.

fig. 1.
Th. 31. & lem. 2. f. 4.

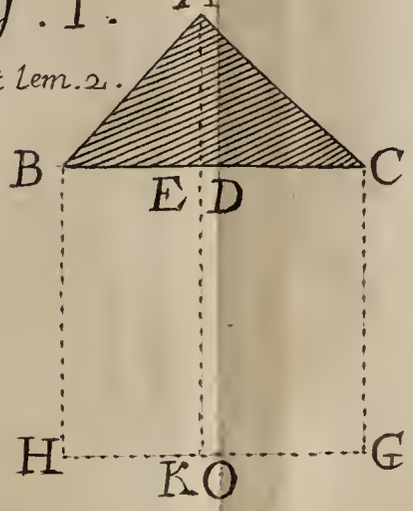


fig. 2.
Th. 32.

fig. 3.
Th. 32.

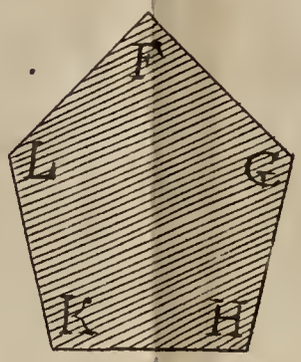


fig. 4.
lem. 3. & Th. 33.

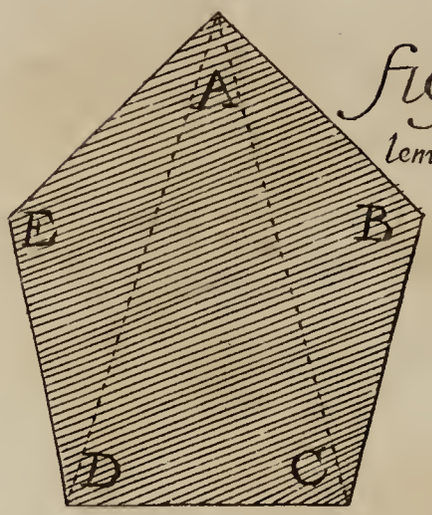


fig. 5.
lem. 3. & Th. 33.

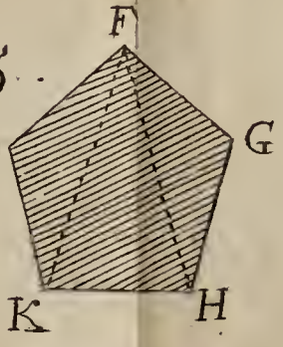
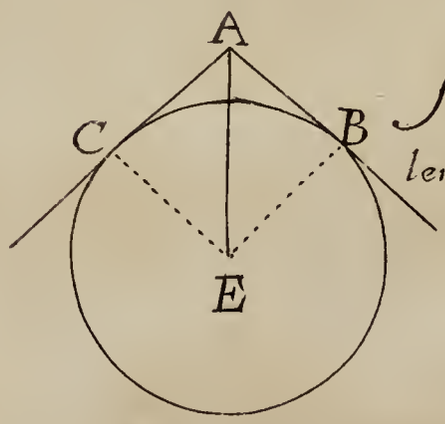


fig. 6.
lem. 4.



TAB. 11

fig. 1.

Th. 34

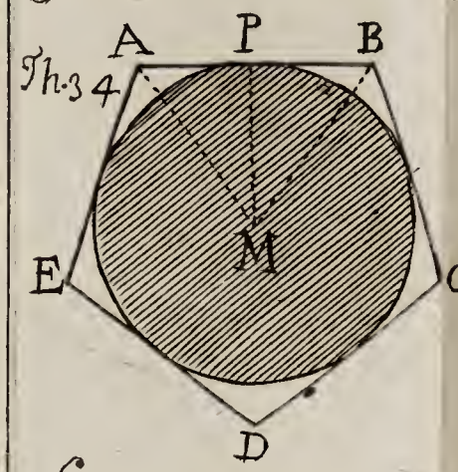


fig. 2.

Th. 34

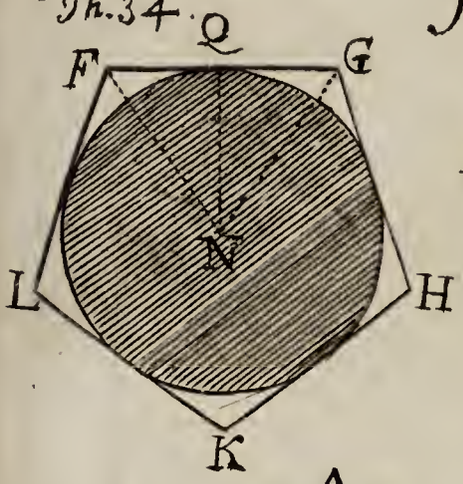


fig. 3.

Th. 35. 36. 37.

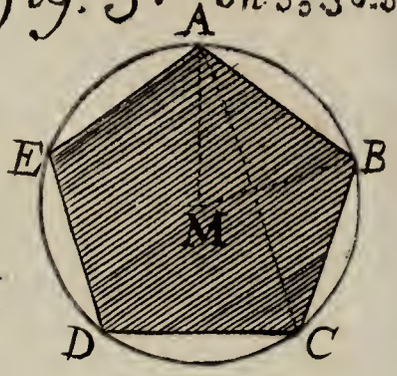


fig. 4.

Th. 35. 36. 37.

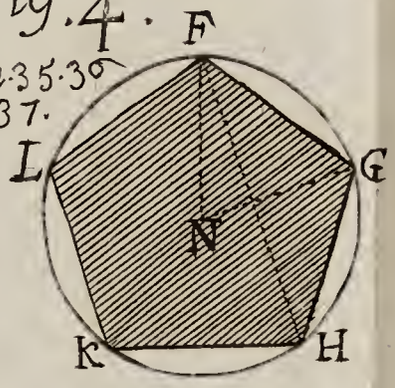


fig. 5.

Th. 38.
Et. Cor. 1. ejusd. Th.

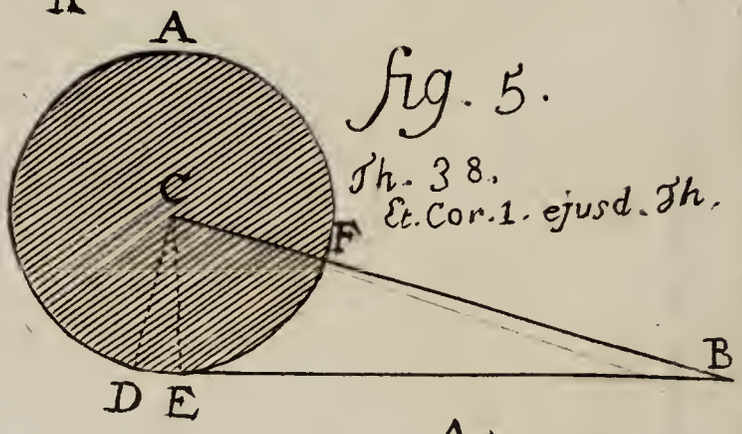


fig. 6.

Th. 39. f. 1.

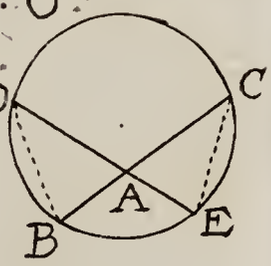


fig. 7.

Th 39. f. 2.

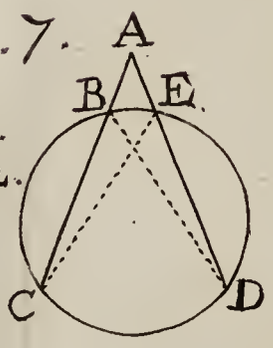


fig. 8.

Th. 39. f. 3.

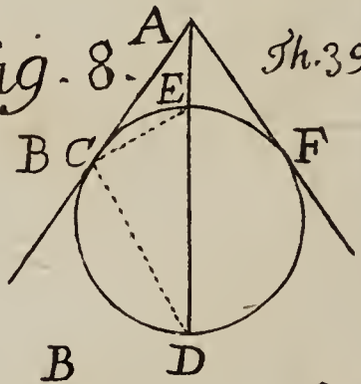


fig. 9.

Trigo Rect. Def. 22.

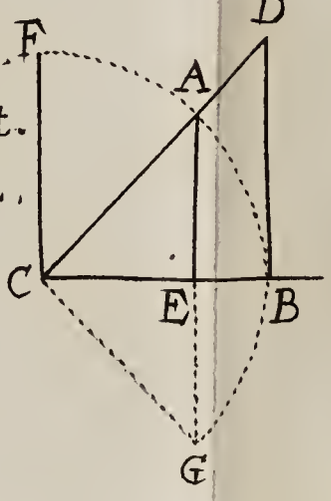
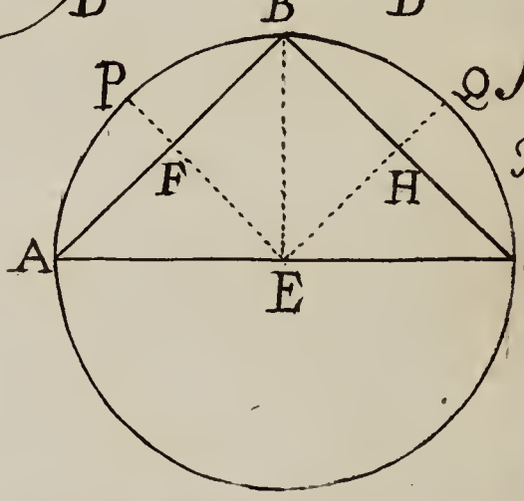


fig. 10.

Th. 40.



TAB. 12.

fig. 1.

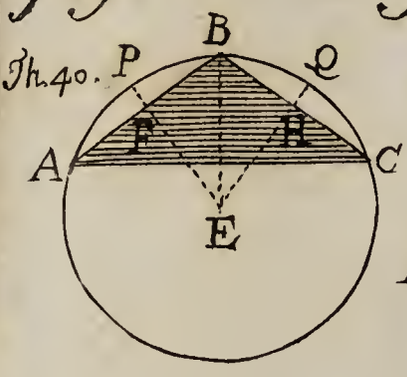


fig. 2. Th. 40.

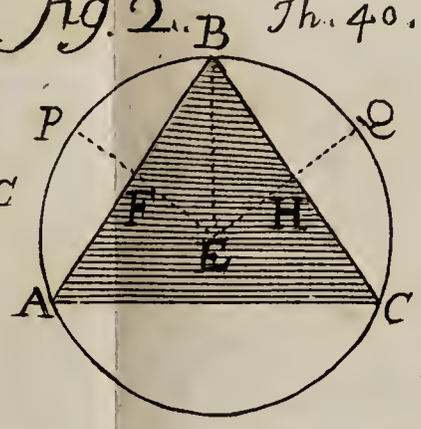


fig. 3. Th. 41.

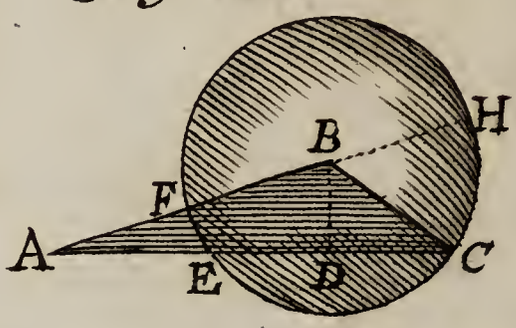


fig. 4. Lem. 5.

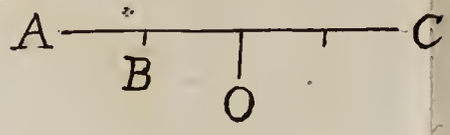


fig. 5.

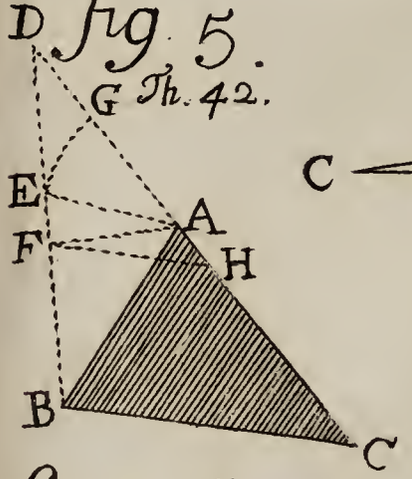


fig. 6.

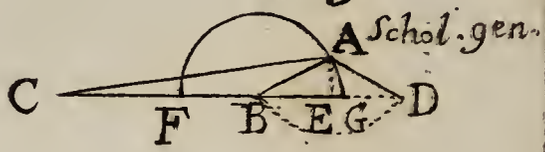


fig. 7. lib. 5.

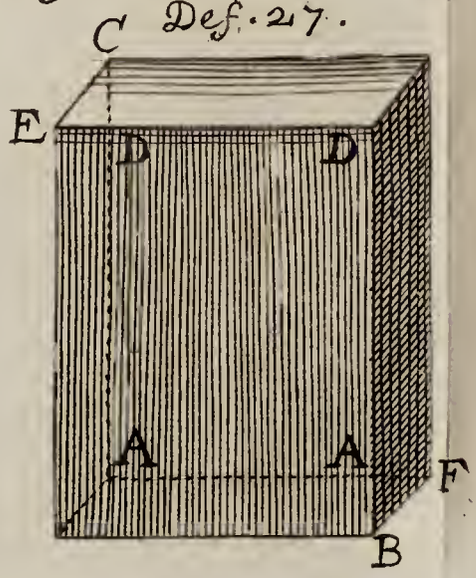


fig. 8. C Def. 27.

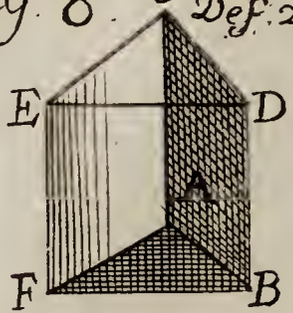


fig. 9. Def. 25.

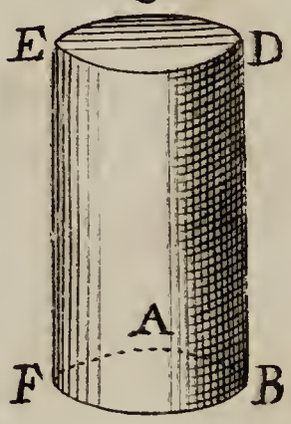


fig. 10.
Def. 26.

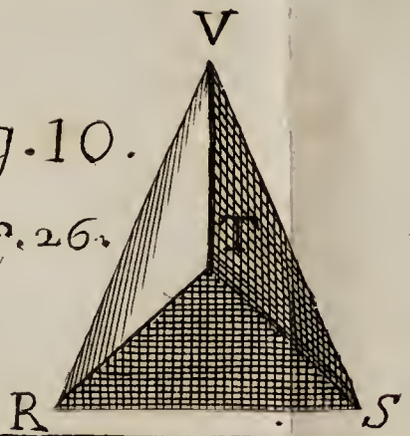
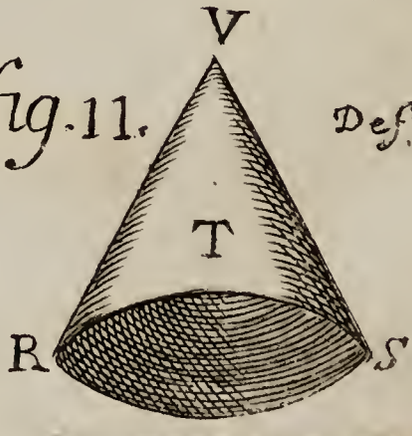


fig. 11. Def. 26.



TAB. 13.

Fig. 1

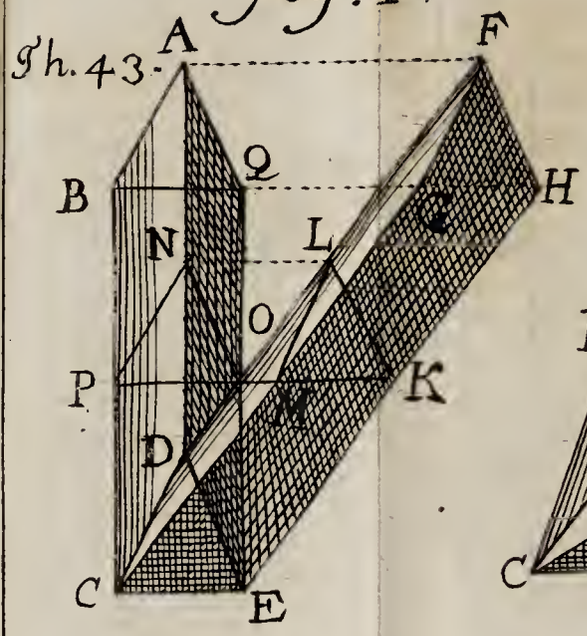


Fig. 2.

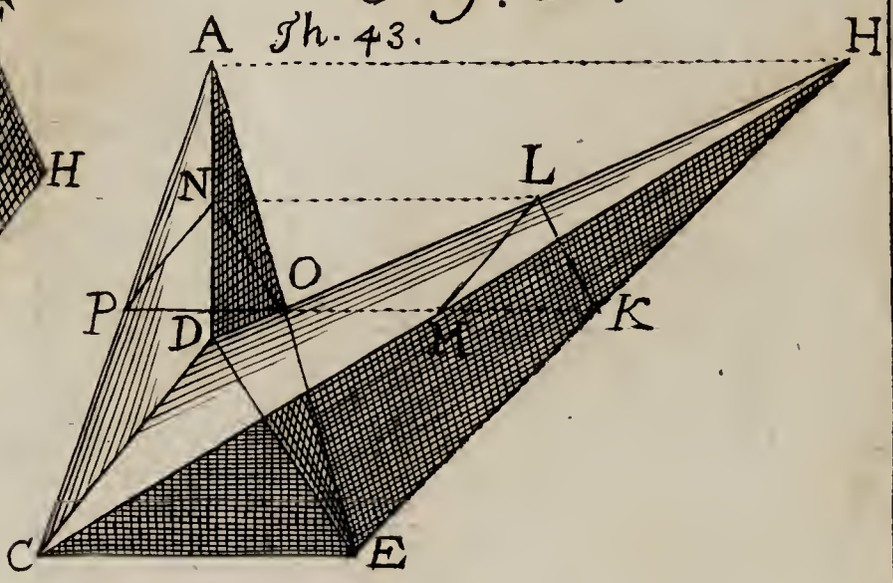


Fig. 3.

Th. 44.

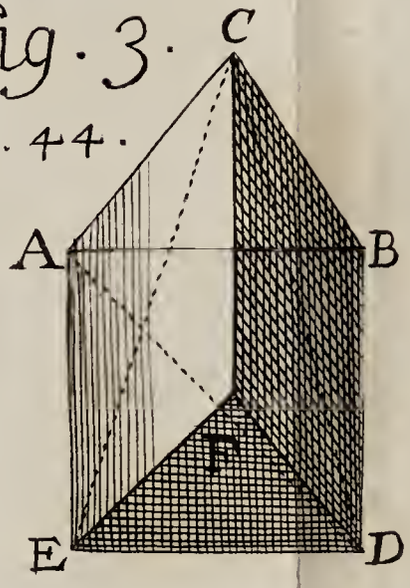


Fig. 4.

Cor. 1. Th. 44.

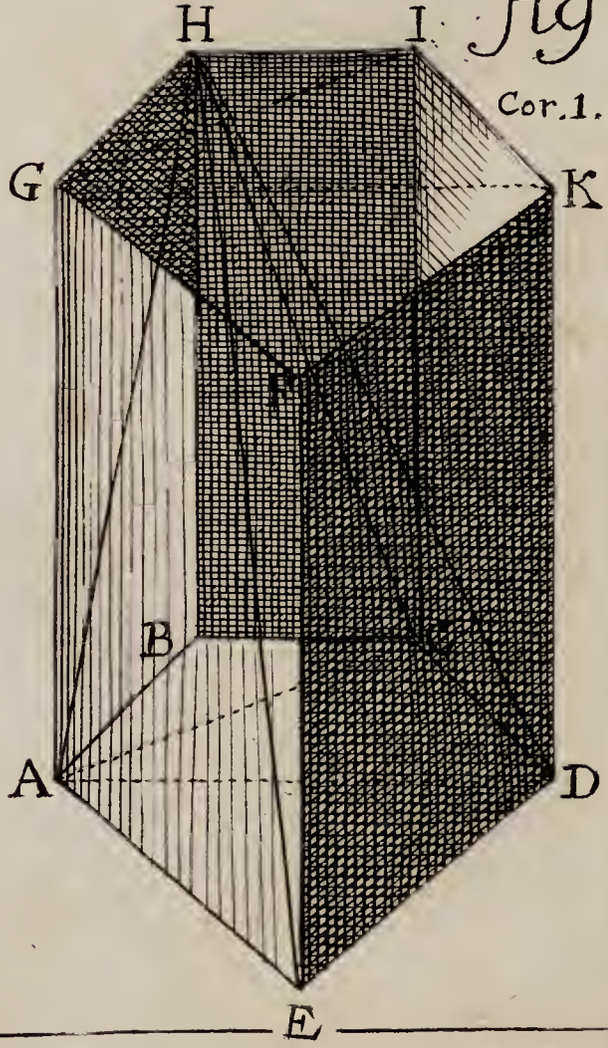
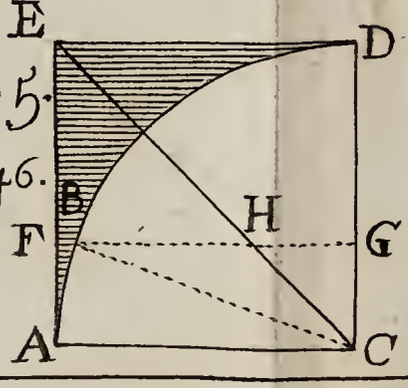


Fig. 5.

Th. 46.



TAB. 14.

fig. 1.

Th. 47.

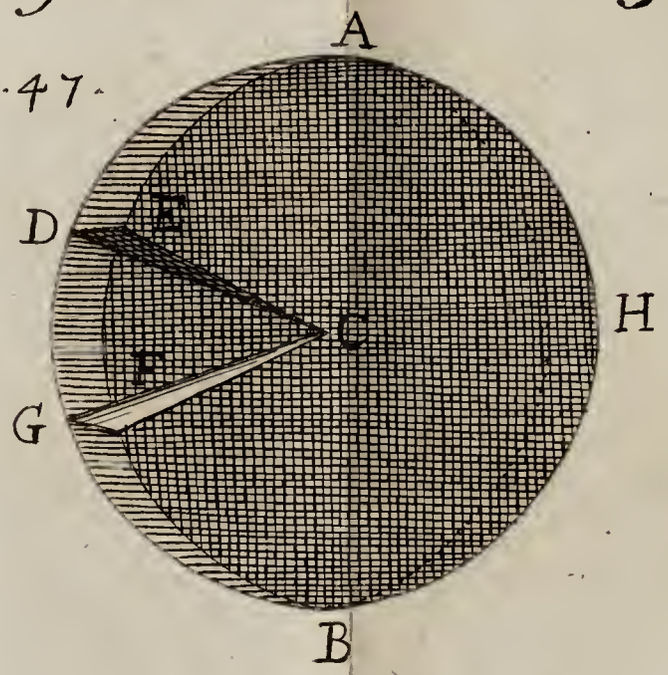


fig. 2.

Th. 48.

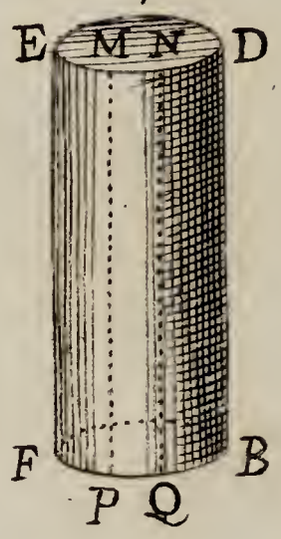
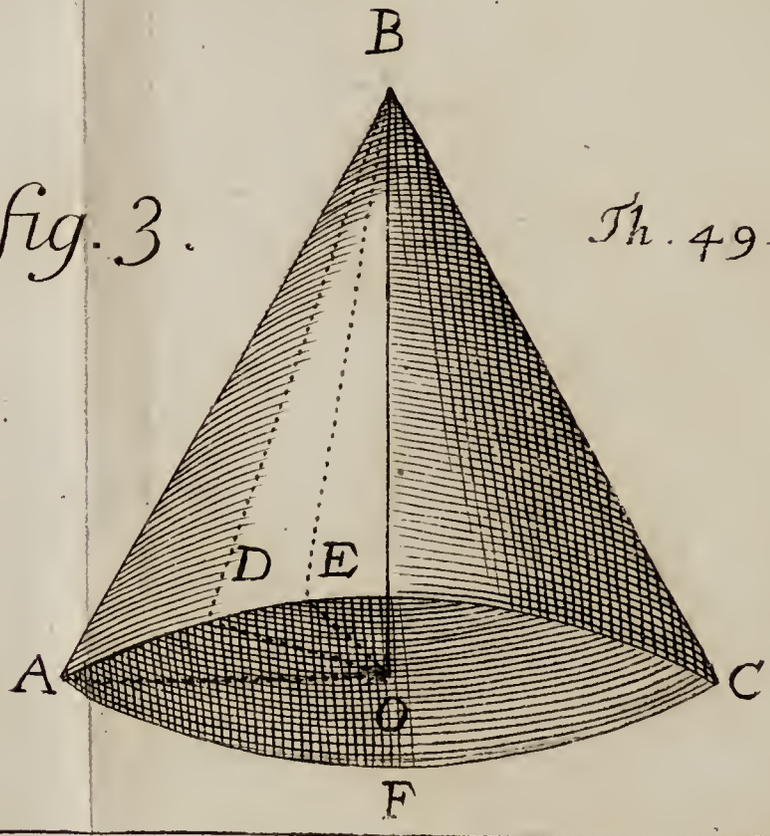


fig. 3.

Th. 49.



TAB. 15.

fig. 1.

Probl. 1. Sol. Cas. 1.

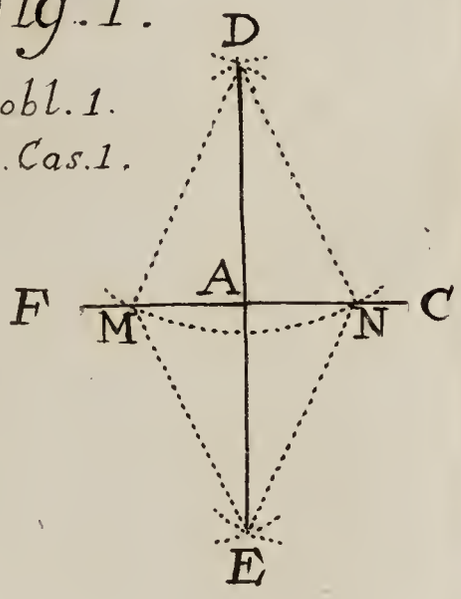


fig. 2.

Probl. 1. alit.

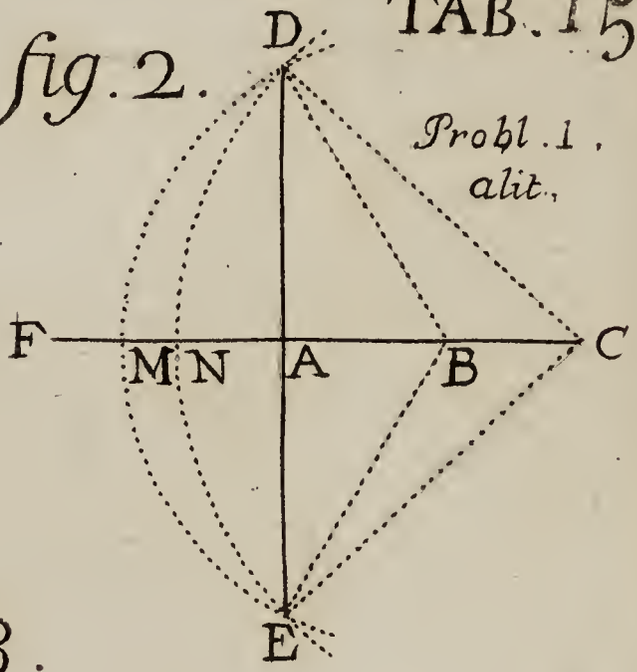


fig. 3.

Probl. 1. Sol. Cas. 2.

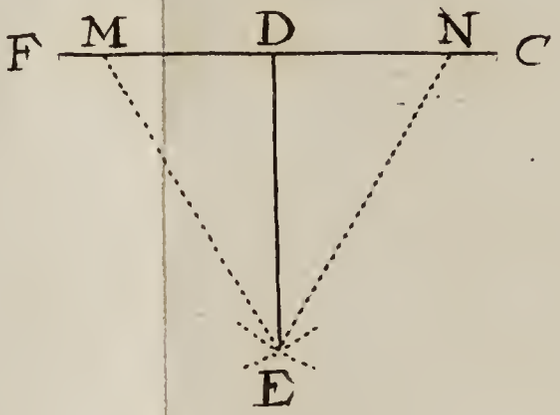


fig. 4.

Probl. 1. alit.

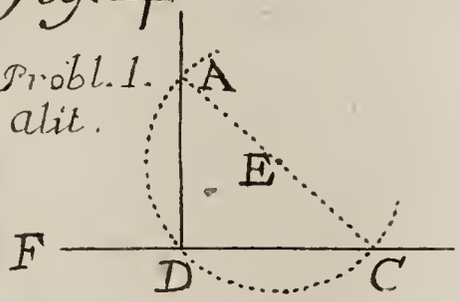
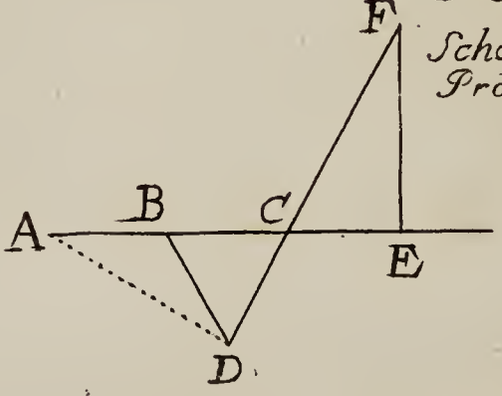


fig. 5.

Schol. Probl. 1.



TAB. 16.

fig. 1.

Probl. 2.

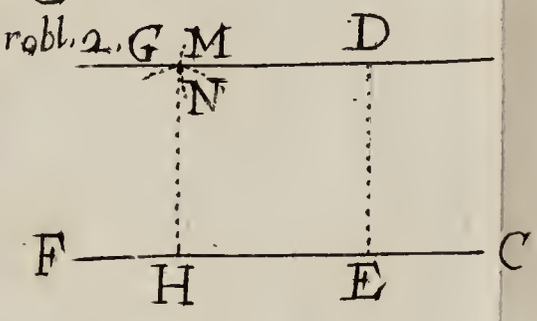


fig. 2.

Probl. 2. alit.

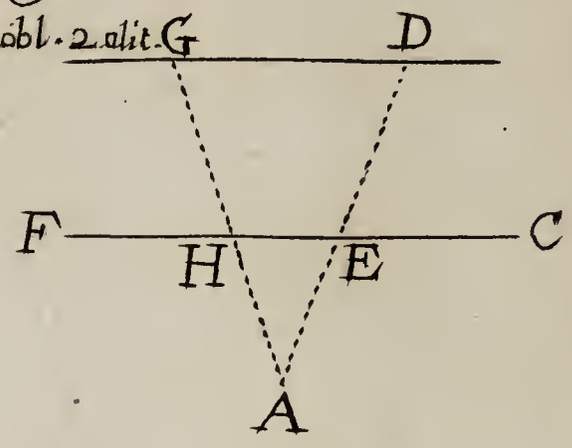


fig. 3.

Probl. 3. Sol. Cas. 1.

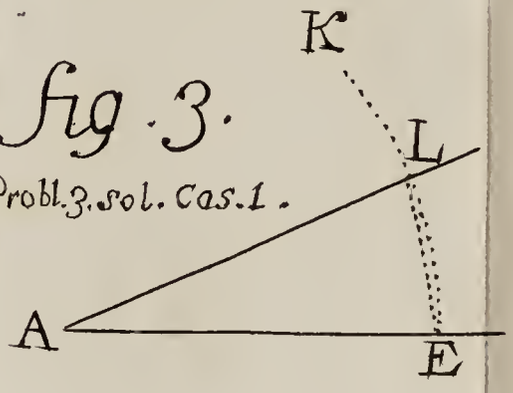


fig. 4.

Probl. 3. Sol. Cas. 1.

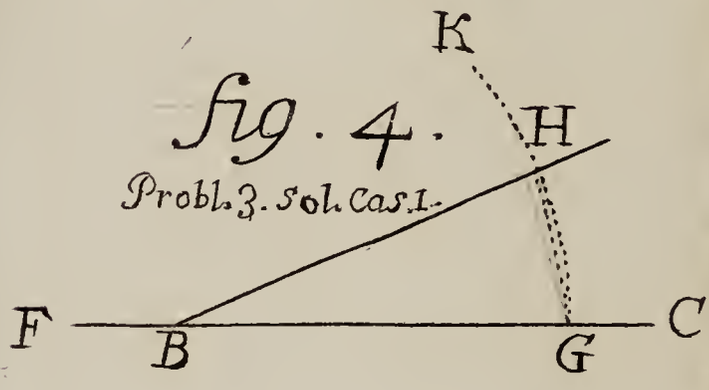


fig. 5.

Probl. 3. alit.

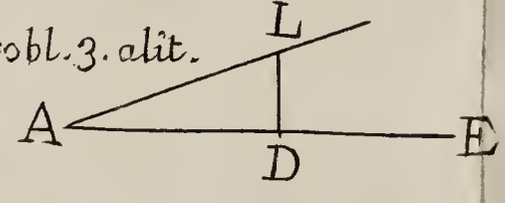


fig. 6.

Probl. 3. alit.

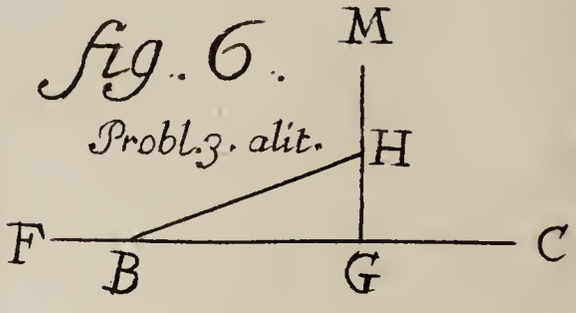


fig. 7.

Probl. 3.
Sol. Cas. 2.

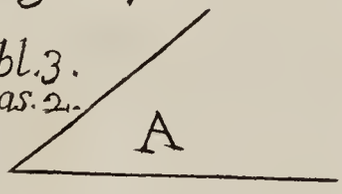
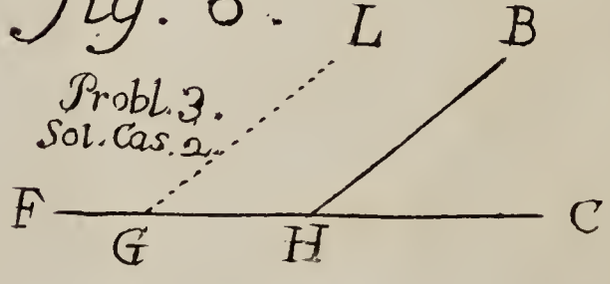


fig. 8.

Probl. 3.
Sol. Cas. 2.



TAB. 17.

fig. 1.
Probl. 4.

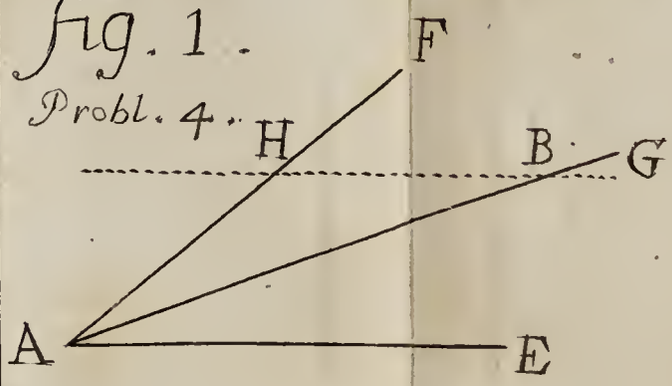


fig. 2. Probl. 4. alit.

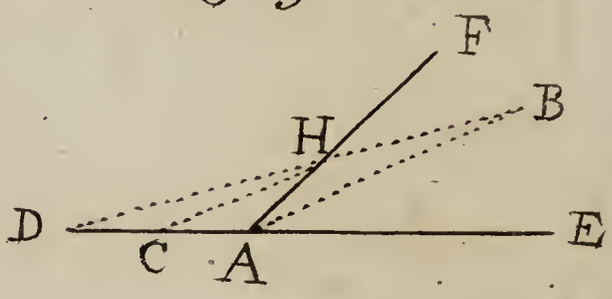


fig. 3.
Probl. 4. alit adhuc.

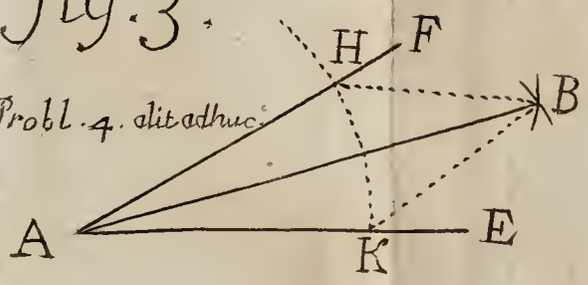


fig. 4.
Probl. 5.

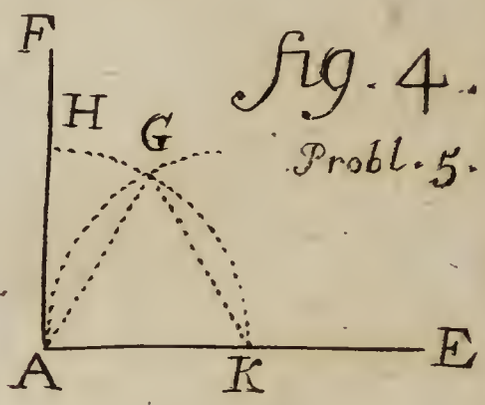


fig. 5.
Probl. 6.

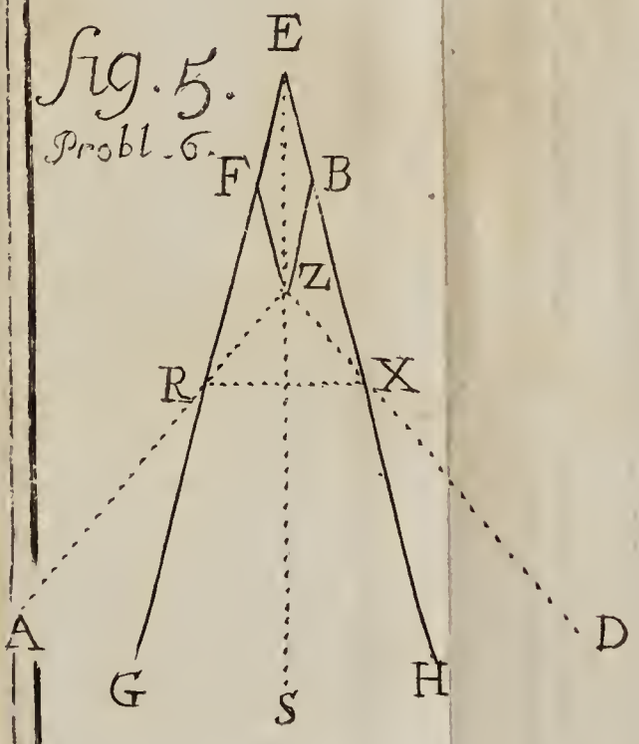
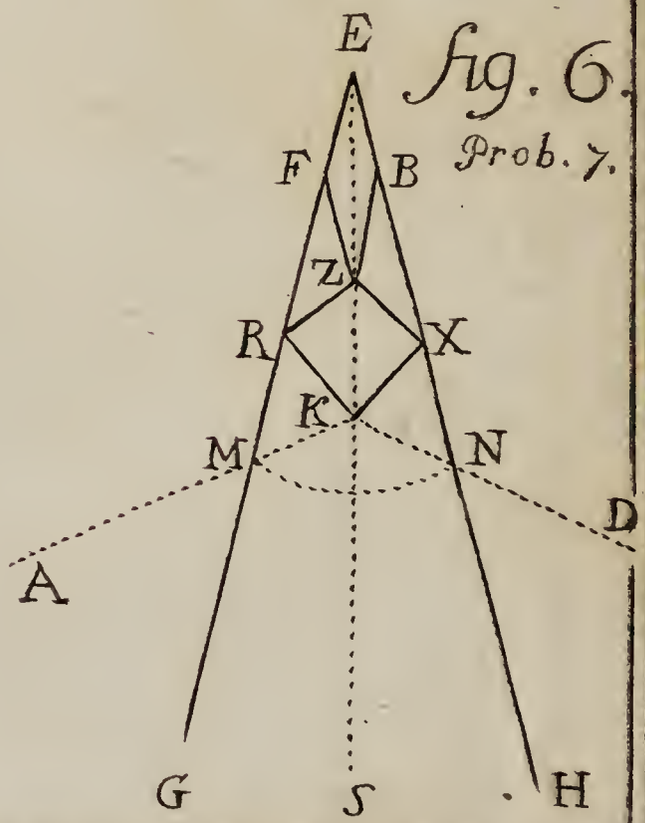
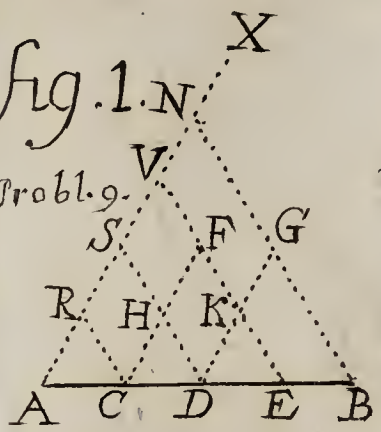


fig. 6.
Prob. 7.



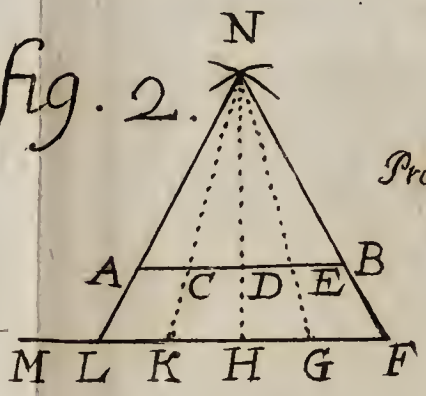
TAB. 18.

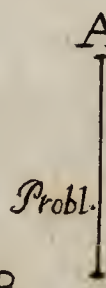
Fig. 1.



Probl. 9.

Fig. 2.





Probl. 9. alit.

Fig. 3.

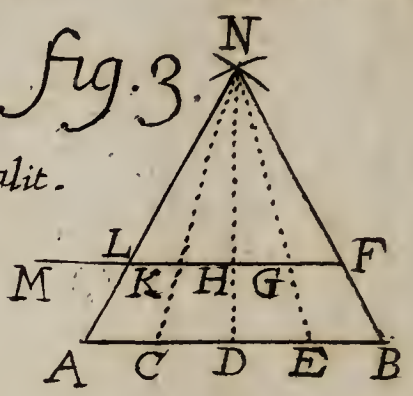


Fig. 4.

Probl. 10.

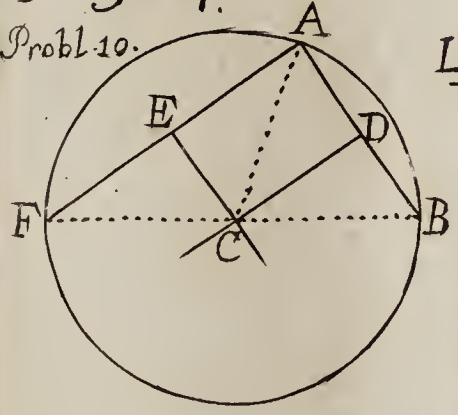


Fig. 5.

Probl. 11.

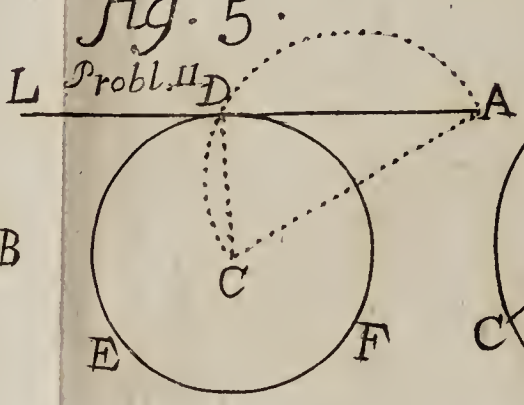


Fig. 6.

Probl. 12.

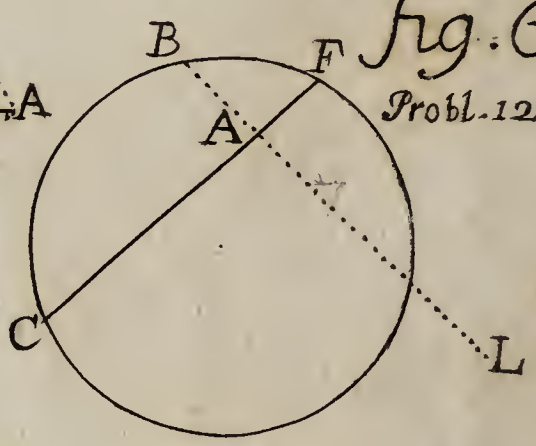
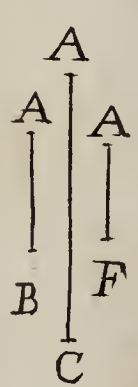


Fig. 7.



Probl. 12. alit.

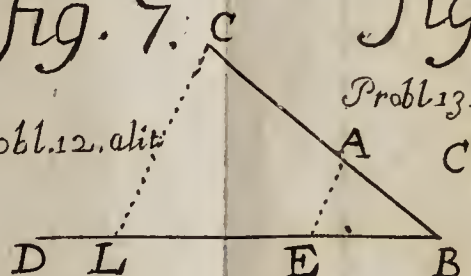


Fig. 8.

Probl. 13.

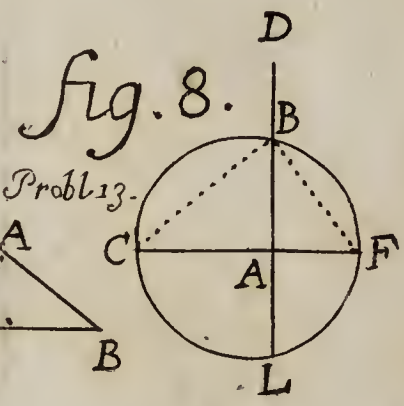
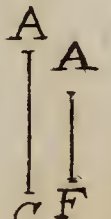


Fig. 9.



Probl. 14.

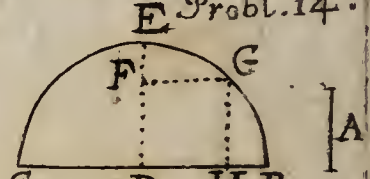
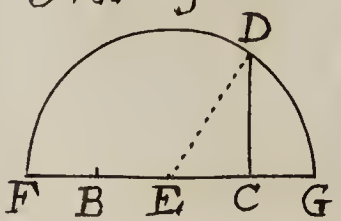


Fig. 10.

Probl. 15.



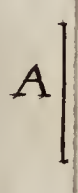


Fig. 11.

Probl. 16.

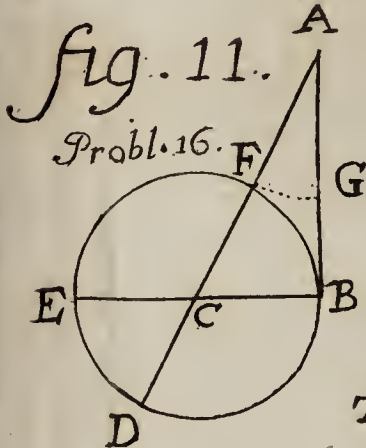
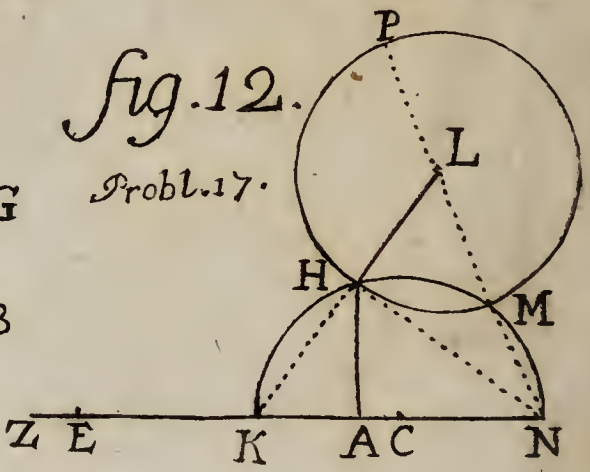


Fig. 12.

Probl. 17.



TAB. 19.

fig. 1.

Probl.

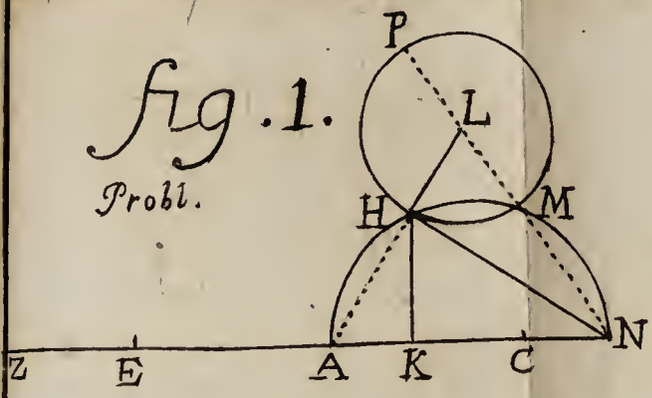


fig. 2.

Probl. 18.

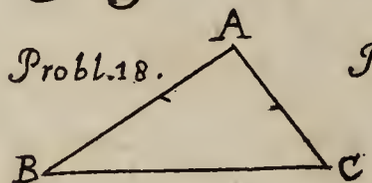


fig. 3.

Probl. 19.

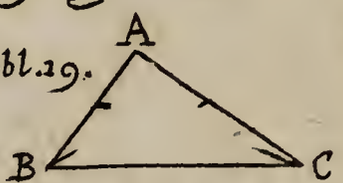


fig. 4.

Probl. 20.

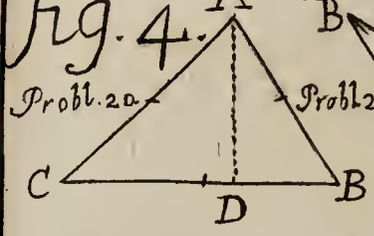


fig. 5.

Probl. 21.

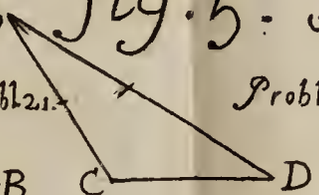


fig. 6.

Probl. 22.

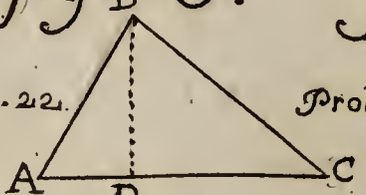


fig. 7.

Probl. 22.

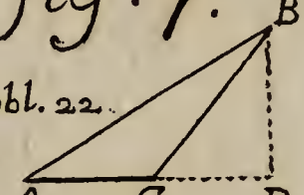


fig. 8.

Probl. 23.

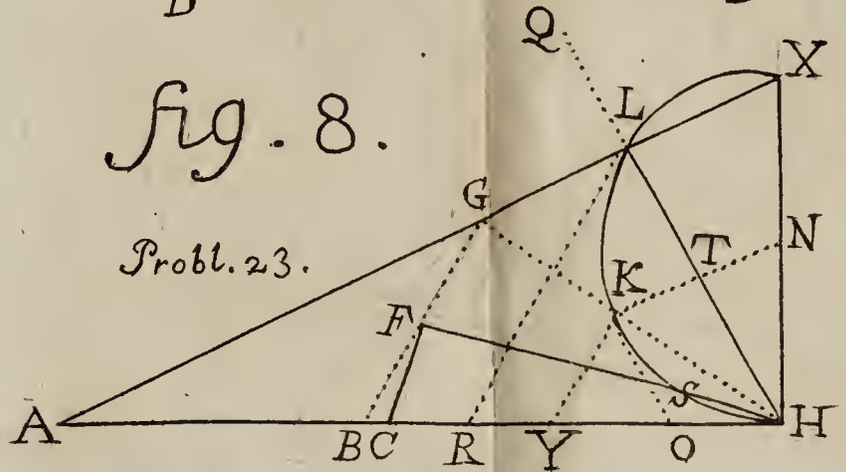


fig. 9.

Probl. 24.

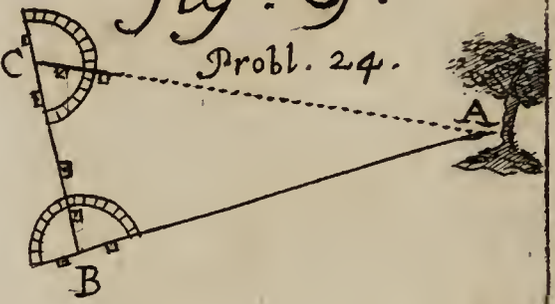
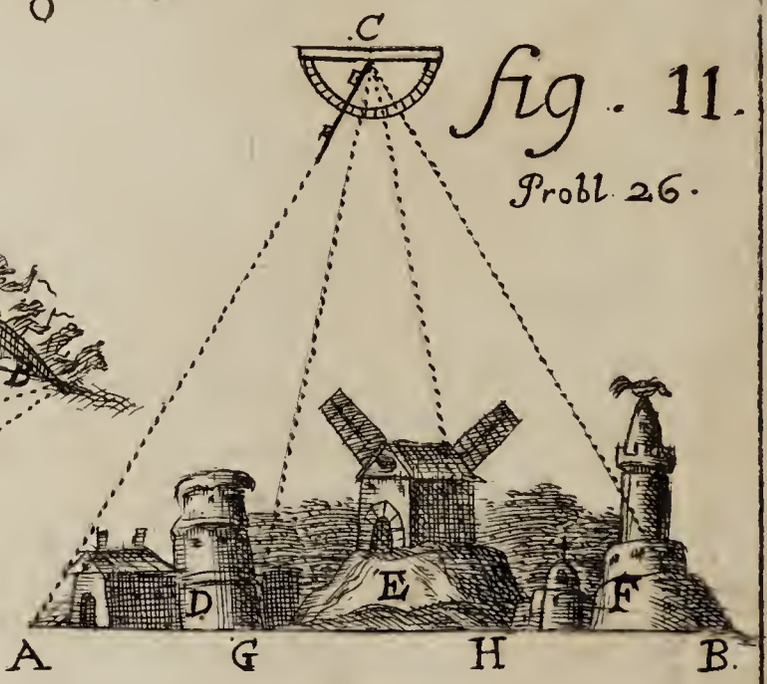


fig. 10.

Probl. 25.

fig. 11.

Probl. 26.



TAB. 20.

fig. 1. Cor. Def. 27.

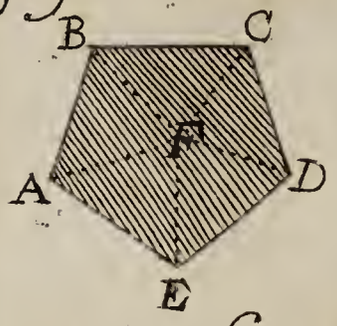


fig. 2.

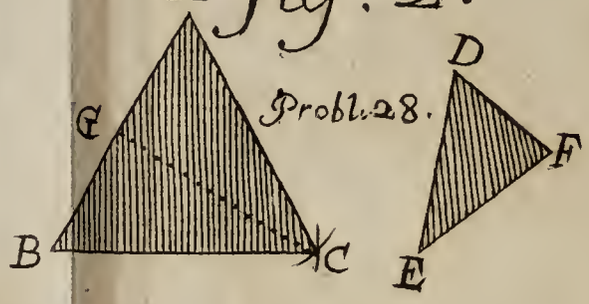


fig. 3.

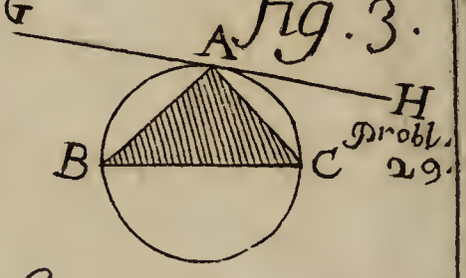


fig. 4.

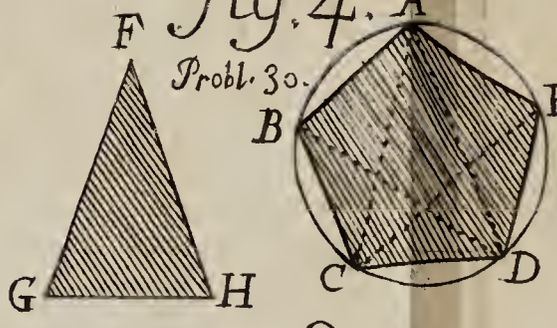


fig. 5.

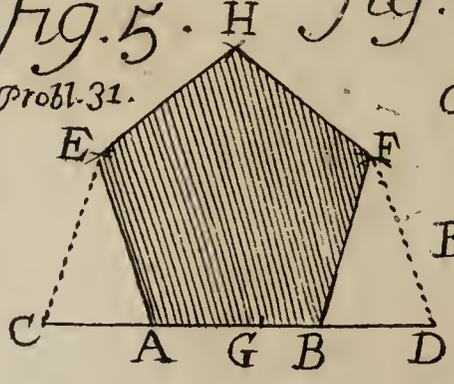


fig. 6.

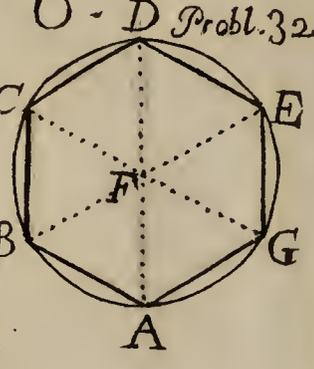


fig. 7.

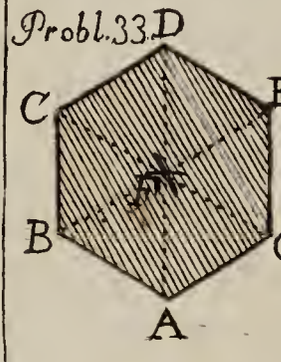


fig. 8.

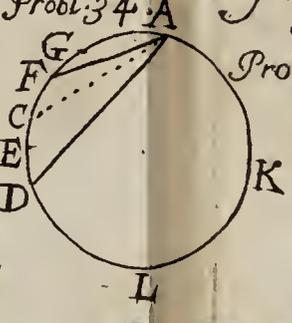


fig. 9.

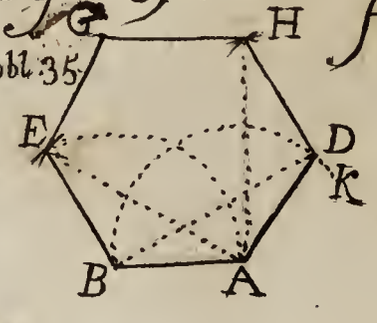


fig. 10.

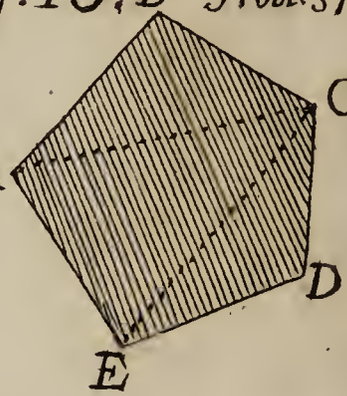


fig. 11.

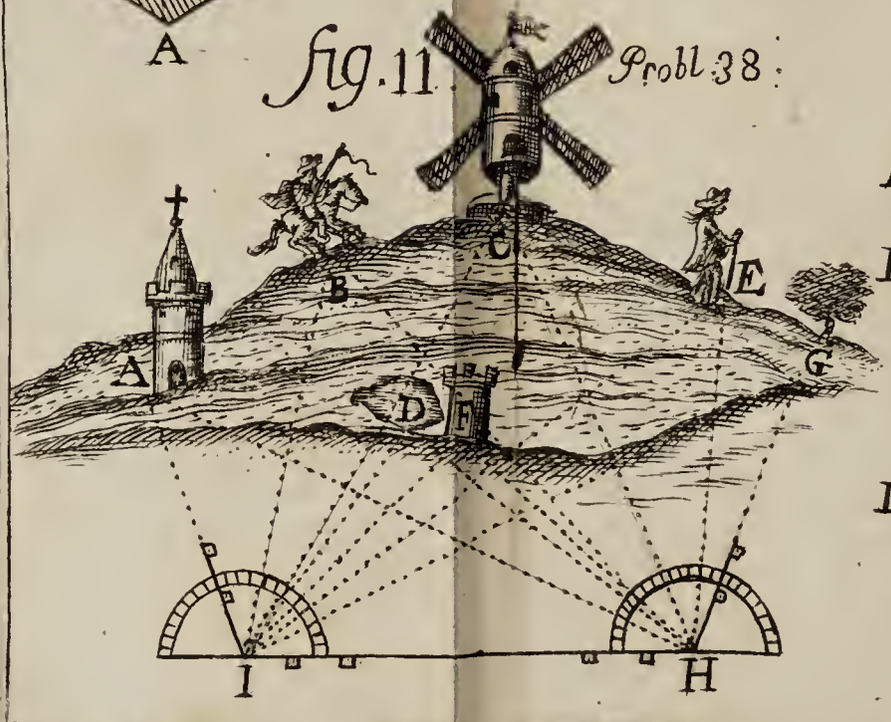


fig. 12.

TAB. 21.

fig 1

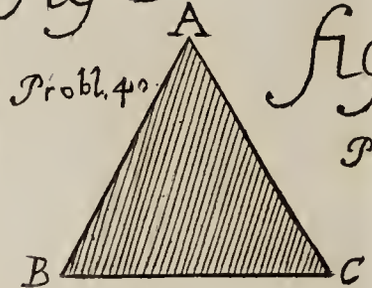


fig. 2.

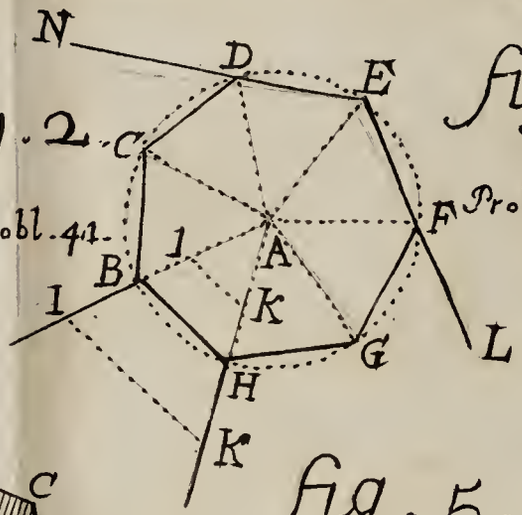


fig. 3.

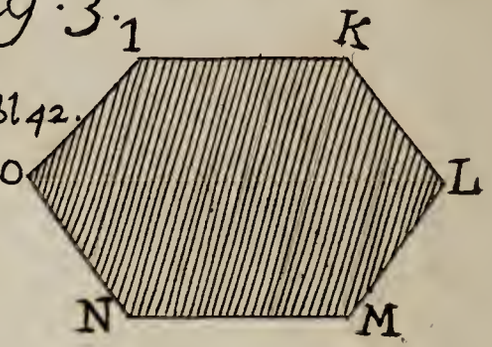


fig. 4.

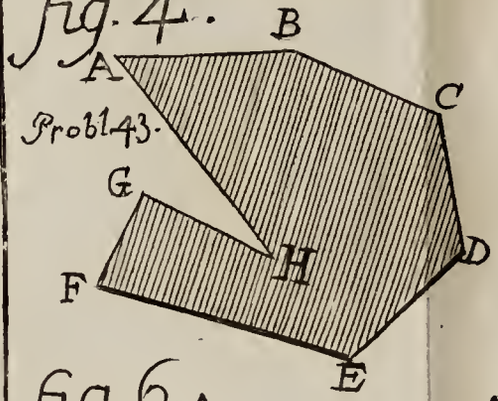


fig. 5.

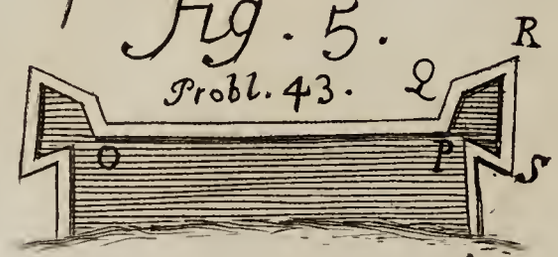


fig. 10.

Probl. 48.

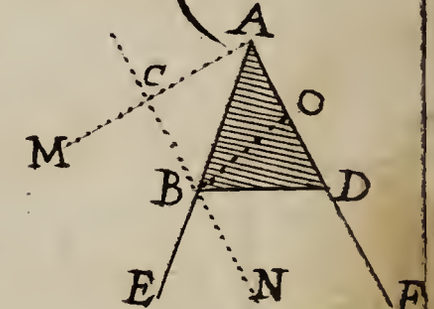


fig. 6.

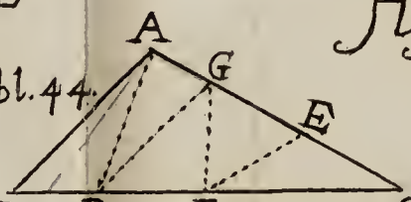


fig. 7.

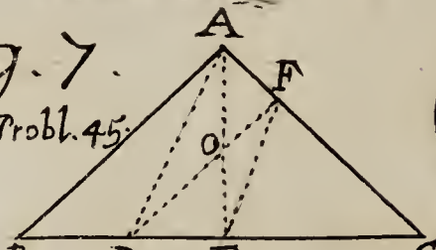


fig. 8.

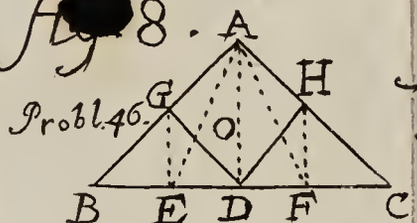


fig. 9.

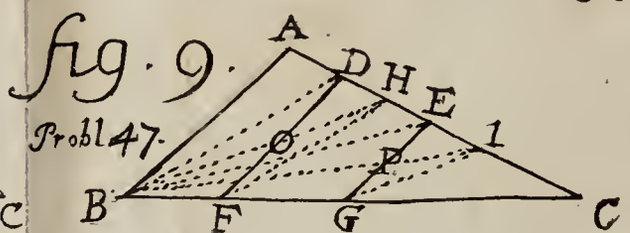


fig. 11.

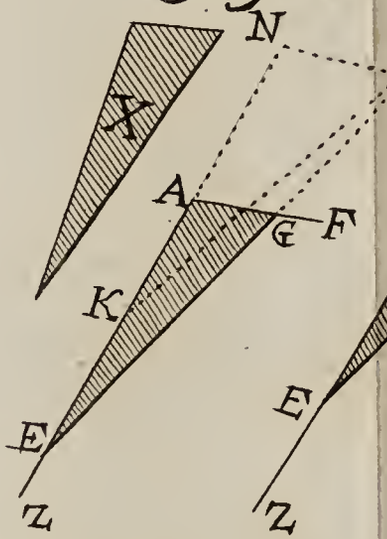


fig. 12.

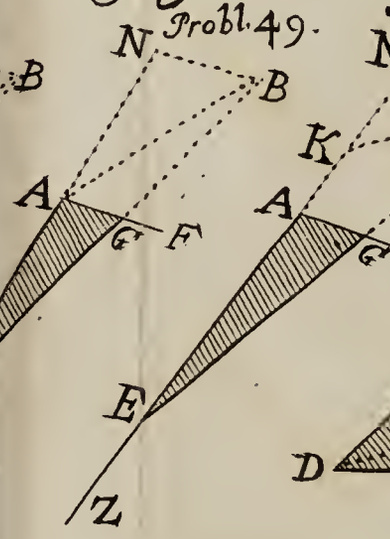
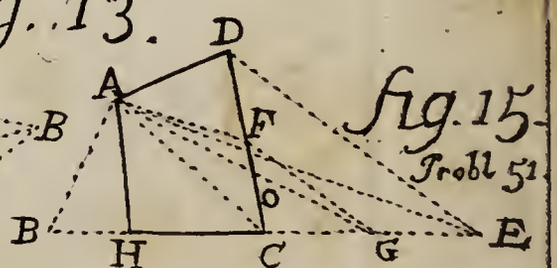


fig. 13.

fig. 15.



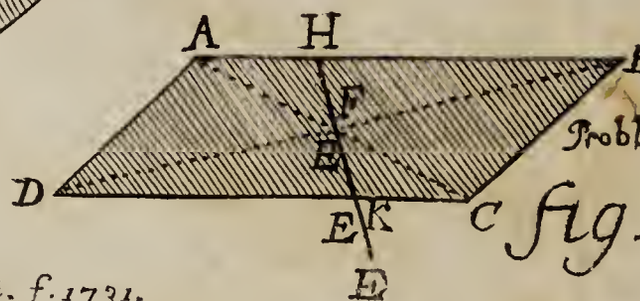


fig. 14.

Vallet. f. 1731.

TAB. 22.

fig. 1.
Probl. 52.

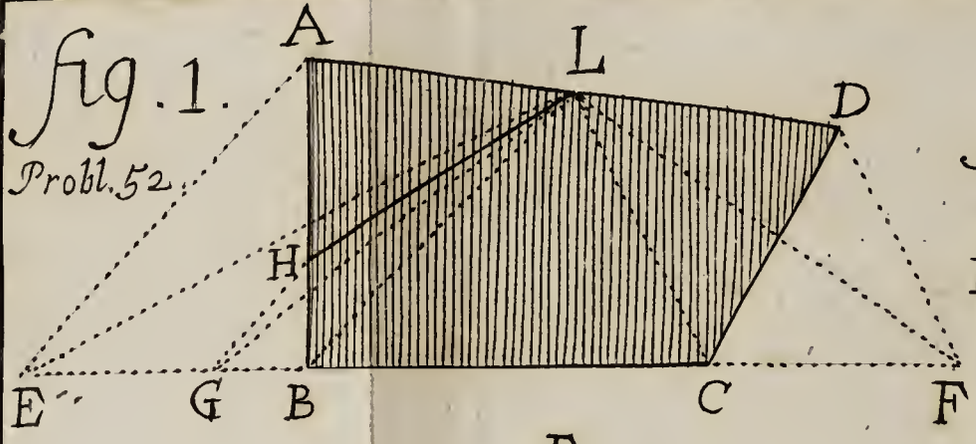


fig. 2.
Probl. 53.

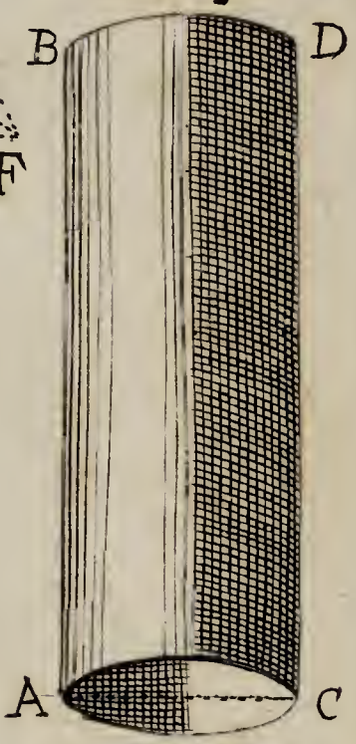


fig. 3.
Probl. 54.

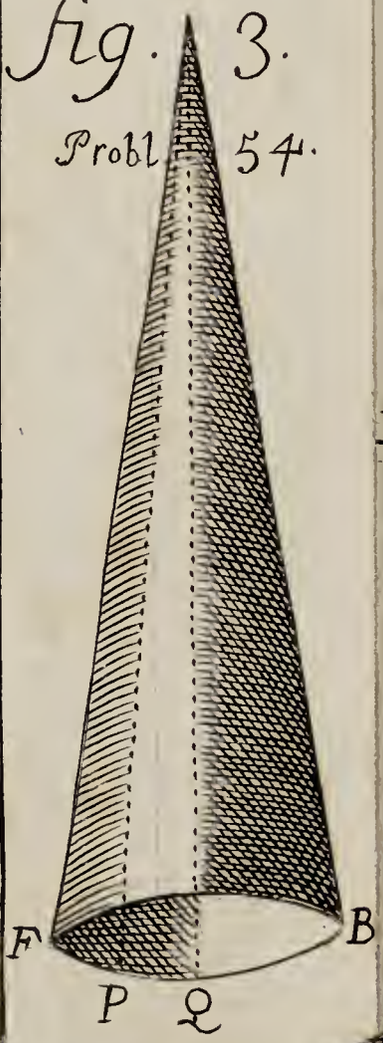


fig. 4.
Lib. 3. Probl. 59.

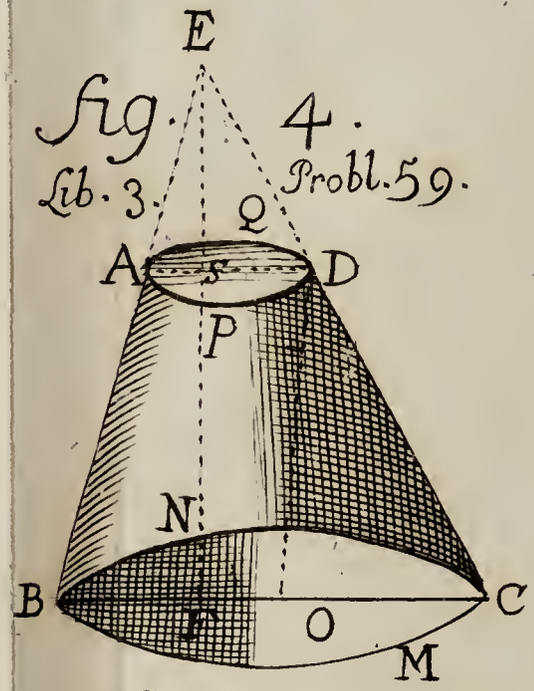
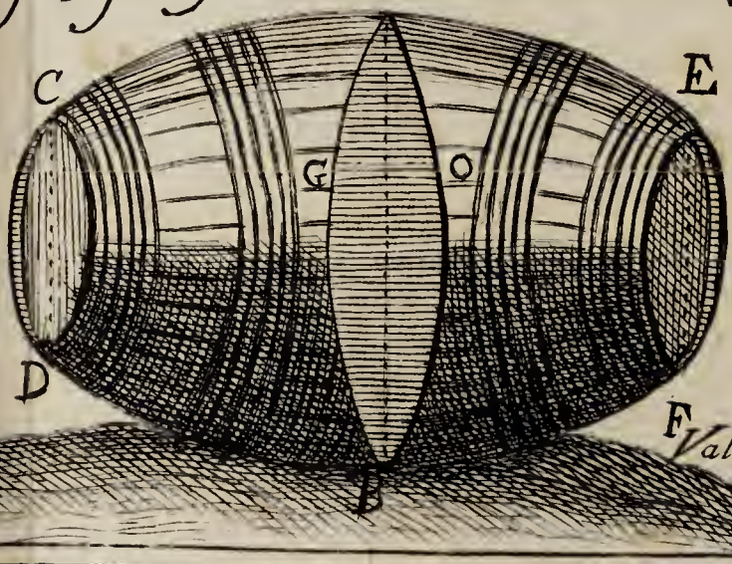


fig. 5. A Cor. Probl. 59.



Vallet. f. 1731.

HOLLAND, PA